Лекция 2 (9 сентября)

Определение интеграла Римана часто сопровождается рисованием картинок с реализацией нижних и верхних интегральных сумм как вписанных в и описанных вокруг подграфика функции дизъюнктных объединений координатных прямоугольников, а также разговорами, что интеграл – это площадь подграфика.

Это приводит к мысли, что мы можем определять в этом духе площади на (координатной) плоскости:

площадь координатного прямоугольника (прямого произведения двух интервалов) положим равной произведению ширины на высоту (произведению длин интервалов). площадь $S(L)$ дизъюнктного объединения $\mathcal{L} = \coprod \mathcal{L}_\rangle$ конечного набора прямоугольников положим равной сумме площадей этих прямоугольников.

Для произвольного множества X на плоскости рассмотрим множество $\mathcal{L}$ всех его подмножеств L вида $\coprod L_i$ – дизъюнктное объединение конечного числа прямоугольников и множество $\mathcal{U}$ всех его надмножеств U вида $\coprod U_i$ – дизъюнктное объединение конечного числа прямоугольников.

Если супремум площадей $L \in \mathcal{L}$ равен инфинуму площадей $U \in \mathcal{U}$:

$$\sup_{L\in\mathcal{L}} = \inf_{U\in\mathcal{U}} \equiv S(X),$$

то множество X называется измеримым по Жордану (Jordan), а вышеопределенное число $S(X)$ называетс ее мерой по Жордану.

Без малейших затруднений это определение обобщается на трех (и более)мерное пространство. Тем самым мы можем определить интеграл функции многих переменных как объем подграфика.

Также как и в одномерии, верно следующее утверждение: **Теорема.** Непрерывная функция на ограниченном измеримом множестве интегрируема.

Доказательство идет в два этапа, опишем их для простоты в двумерии. Первый шаг интегрируемость непрерывной функции на прямоугольнике, что следует из равномерной малости колебания функции на малом прямоугольнике, что показывает малость разности верхней и нижней интегральных сумм. На втором шагу мы пользуемся измеримостью области интегрирования и сводим задачу к сравнению верхней интегральной суммы для надмножества U и нижней интегральной суммы подмножества L, составленных из прямоугольников.

Аналогом одномерного утверждения про интегрируемость ограниченной функции с малым множеством разрывов является следующая:

Теорема. Ограниченная функция на ограниченном измеримом множестве мера множества разрывов которой имеет Меру Жордана ноль интегрируема.

Доказательство идет полностью параллельно одномерному случаю, покроем множество точек разрыва объединением прямоугольников столь малой площади, что разность верхних и нижних интегральных сумм, оцениваемая через эту площадь и максимум модуля функции будет мала. На дополнении функция непрерывна, и действуют аргументы из доказательства предыдущей теоремы.

В предшествующих рассуждения имеется существенный пробел!!!

Все рассуждения про интеграл верны для графика положительной функции, и то, что называлось подграфиком, есть область между графиком и координатной прямой. Мы видим, что если график лежит под координатной прямой, интеграл Римана требует считать такой объем *отрицательным*!

В основе этого лежит довольно глубокое понятие ориентации. Для координатной $\mathbb{R}^n$ координация задается упорядочением координат, порядки, отличающиеся на четную перестановку, задают одну и ту же ориентацию, а на нечетную противоположную. Отметим, что нет выделенной ориентации на некоординатизированном пространстве, их просто две разных, а выбор системы координат выделяет ориентацию лишь тем что мы задаем координаты, неявно упорядочив их. Линейная замена (упорядоченных) переменных сохраняет ориентацию. если ее определитель положителен, и меняет в обратном случае. Это определение согласовано с перестановками координат, так как определитель перестановочной матрицы равен знаку перестановки. Дифференцируемая замена сохраняет ориентацию, если определитель матрицы частных производных в какой-то точке положителен и меняет ее, если этот определитель отрицателен. Знак определителя не зависит от точки, так как он непрерывен и не обнуляется в силу обратимости. Тем самым в основании этого понятия лежит наличие не менее двух компонент связности у группы обратимых линейных преобразований пространства, отличающихся знаком определителя.

Объем тела снабженного ориентацией в ориентированном пространстве равен вышеопределенной мере Жордана, если ориентации совпадают, и противоположному, если ориентации различны.

Ситуация с интегралом Римана разъясняется следующим образом: Область между графиком и координатной прямой ориентируется таким образом: Первая координата абсцисса при обычном порядке интегрирования от меньшего числа к большему, вторая направлена от оси абсцисс к графику. Для положительных значений функции так заданный порядок является стандартным и вклад в интеграл (=объему) положительный. Для отрицательных значений функции так заданный порядок является нестандартным и вклад в интеграл (=объему) отрицательный. Этот подход будет согласован и с конвенцией о интегрировании от большего числа к меньшему, полагая что ось абсцисс ориентируется в обратном направлении (в сторону в которую идет интегрирование).