Лекция 1 (2 сентября)

На первом курсе мы постоянно использовали системы координат и их замены, не давая формальных определений. Пришло время это исправить.

В анализе мы оперируем с объектами, определенными на интервале координатной прямой $\mathbb{R}^1$ (более общо, на области в координатном пространстве $\mathbb{R}^n$). Тем самым исходно у нас определены координаты. Однако, также как и в линейной алгебре, не существует выделенной системы координат . Так функция $\tan(\frac{\pi}{2}x)$ отождествляет интервал $(-1,1)$ со всей координатной прямой $\mathbb{R}^1$, а функция x^3 – с тем же интервалом $(-1,1)$; полярные координаты отождествляют дополнение к отрицательному лучу в координатной плоскости $]BbbR^2$ с полуполосой $r > 0, -\pi i < \phi < \pi i$ в координатной плоскости $\mathbb{R}^2$. Поскольку область координатизирована изначально, то обычно говорят о *замене координат.*

Фиксация системы координат необходима при определении дифференцируемости функций, дифференцируемая замена сохраняет дифференцируемость, а, скажем, замена $y = x^{1/3}$ - нет. Тем самым, топологическое пространство интервал снабжается дополнительной структурой – набором координат, связанных дифференцируемыми заменами. Такое описание структуры многими считается неэстетичным и его заменяют на эквивалентное определение как подкольца дифференцируемых функций кольца непрерывных функций.

Второй сюжет лекции посвящен вопросу, что же мы интегрируем, поскольку для интегрирования функции необходима координата, а при замене координаты необходимо (для получения того же результата) функцию домножить на производную замены. Ассоциация из линейной алгебры: вектор задается набором координат (= функцией на конечном множестве) фиксацией базиса. при замене базиса координаты преобразуются. Диагональность замены базиса отвечает следующей ситуации: каждой точке конечного множества (базы) соответствует одномерное (некоординатизированное) векторное пространство (слой) и вектор пространсва это сопоставление каждой точке базы вектора в слое над ним.

Набор одномерных векторных пространств (слоев)L_s, параметризованных точками s множества S называется *линейным расслоением* L над базой S (от линия - одномерное векторное пространство) , сопоставление каждой точке S вектора называется *сечением.*

В топологии и в анализе ситуация несколько сложнее; хотелось бы, чтобы слой над точкой непрерывно или дифференцируемо зависел от точки базы. Мы отложим формальные определения и начнем с примеров.

ПЛОСКОСТЬ. Сопоставим точке на оси абсцисс вертикальную прямую, проходящую через эту точку (ыщжно сказать что это слой вертикальнойпроекции, что и объясняет применение слова слой в общей ситуации). тогда сечение – это график функции, и можно потребовать, чтобы функция обладала какими-нибудь дополнительными свойствами – была бы непрерывной или дифференцируемой ...

ЦИЛИНДР Склеим полосу $0 \leqslant x \leqslant 1$ по краям. Тогда слои вертикальной проекции образуют линейное расслоение, а сечения – это графики периодических функций. Поскольку для периодичеких функций осмысленно понятие быть непрерывной или дифференцируемой ..., можно говорить о аналогичных свойствах сечения цилиндра

ЛИСТ МЕБИУСА Склеим полосу $0 \leqslant x \leqslant 1$ по краям с переворотом. Тогда слои вертикальной проекции образуют линейное расслоение, так как умножение на -1 является линейным отображением. Сечения – это графики антипериодических функций. Для антипериодичеких функций осмысленно понятие быть непрерывной или дифференцируемой ..., так как умножение на -1 не меняет этих свойств функции. Поэтому, как и в случае цилиндра, можно опредилить непрерывность ... сечения.

Перейдем к формальному определению. Пусть S – топологическое пространство а L –линейное расслоение над ним. L является непрерывным линейным расслоением, если для каждого достаточно малого открытого множества $U \subset S$ можно выбрать базисный вектор e_s^U в каждом слое $L_s, s \in U$ так,что на пересечениях $U_1 \cap U_2$ двух таких множеств коэффициент пропорциональности c_{12} между этими векторами $e_s^{U_1} = c_1 2(s) e_s^{U_2}$ будет непрерывной функцией s.

Аналогично определяется дифференцируемое расслоение.