Занятие и задание 9

Задача 1. Разложите в ряд Тейлора в нуле функцию $(1+x)^4$.

Задача 2. Разложите в ряды Фурье по системам

$$E = \{e^{inx} \,|\, n \in \mathbb{Z}\}, \qquad SC = \{1, \sin(nx), \cos(nx) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

следующие функции: $\cos^2 x, \sin^3 x$.

Задача 3. Найдите общий вид ряда Фурье для

a) π-периодической функции по системе E;

b) нечетной функции по системе SC.

Подсказка: воспользуйтесь единственностью ряда Фурье.

Задача 4. Пусть $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,\ a_k \in \mathbb{C}$.

a) Разложите в ряд Фурье функцию $f_r(\theta) = P(re^{i\theta})$.

b) Будет ли отображение $\mathbb{R}^+ \to L_2(S^1),\ r \to f_r$ непрерывным?

Задача 5. Пусть

$$F(z) = \sum_0^\infty a_k z^k, \qquad \sum_0^\infty |a_k|^2 < \infty. \tag{1}$$

Положим $f_r(\theta) = F(re^{i\theta})$.

a) Оцените снизу радиус сходимости ряда (1).

b) Докажите, что $f_r \in L_2(S^1)$ при всех $r \in [0,1]$.

c) Будет ли отображение $[0,1] \to L_2(S^1),\ r \to f_r$ непрерывным?

Задача 6. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_0^\infty c_k e^{ikx}$, где $\sum |c_k| < \infty$. Докажите, что она продолжается непрерывно функцией, голоморфной в верхней полуплоскости, и оцените сверху ее модуль.

Задача 7. Разложите в ряд Фурье по базису $e^{2\pi i \frac{k}{l} x}$, $k \in \mathbb{Z}$, функцию с периодом $2\pi l$.

Задача 8. Выразите корни из единицы k-той степени через комплексную экспоненту. Найдите их сумму.

Задача 9. Запишите эрмитово скалярное произведение в ортонормальном базисе.

Задача 10. Восстановите эрмитову форму (u,v) по значениям её квадратичной формы (v,v).

Задача 11. Пусть (u,v) — эрмитова форма на $\mathbb{C}^n$.

a) Докажите, что $\mathrm{Re}(u,v)$ — скалярное произведение, а $\mathrm{Im}(u,v)$ — симплектическая (невырожденная кососимметрическая) форма на $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

b) Восстановите (u,v) по $\mathrm{Re}(u,v)$ и оператору умножения на комплексное число i.

c) Восстановите (u,v) по $\mathrm{Im}(u,v)$ и оператору умножения на комплексное число i.

d^*) Восстановите оператор умножения на i по $\mathrm{Re}(u,v)$ и $\mathrm{Im}(u,v)$.

e^*) Можно ли восстановить (u,v) по $\mathrm{Re}(u,v)$ или $\mathrm{Im}(u,v)$, не используя умножение на i?

Задача 12. Для каких непрерывных функций $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формула

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}F(x)dx$$

задаёт эрмитово скалярное произведение в пространстве финитных непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$?