Анализ II　　　　14 октября

Занятие и задание 7

Задача 1. Пусть ω — k-форма на $\mathbb{R}^n$, пусть v — векторное поле на $\mathbb{R}^n$. Положим для $x \in \mathbb{R}^n$ и векторов $v_1, \dots, v_{k-1}$ в точке x

$$(\iota_v\omega)(x; v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(x; v(x), v_1, \dots, v_{k-1}).$$

a) Докажите, что $\iota_v\omega$ является $(k-1)$-формой.

b) Коммутирует ли операция ι_v с дифференциалом d?

Задача 2. Докажите тождества

a) $\iota_v\iota_u\omega = -\iota_u\iota_v\omega$ для векторных полей u, v и формы ω,

b) $\iota_v(\omega \wedge \eta) = \iota_v(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_v(\eta)$ для векторного поля v, k-формы ω и l-формы η.

Задача 3. Лежат ли в образе дифференциала формы в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, записанные в полярных координатах как

a) dr;

b) $d\phi$;

c) $dr \wedge d\phi$?

Задача 4. a) Докажите, что площадь фигуры на плоскости, огрниченной несамопересекающейся гладкой кривой C равна $|\int_C x\,dy|$.

b) Чему будет равен этот интеграл для самопересекающейся кривой?

Задача 5. Вычислите интеграл по сфере радиуса r в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат от формы

a) $xdy \wedge dz$;

b) $ydy \wedge dz$;

c) $x^2dy \wedge dz$.

Задача 6. Пусть η — форма нечётного порядка. Положим $D(\omega) = d\omega + \eta \wedge \omega$. Найдите условие на форму η, при котором $D^2 = 0$.