Занятие и задание 4

Задача 1. Вычислите интегралы

a) $\int_{\mathbb{R}} e^{ax^2+bx+c}dx$, $a<0$;

b) $\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-x^2}dx$, $k \in \mathbb{N}$;

c) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{Q(x)}dx$, где $Q(x)$ — отрицательно определённая квадратичная форма.

Задача 2. При каких значениях $p>0$ сходятся интегралы

a) $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx_1\dots dx_n}{(1+|x_1|^p)\dots(1+|x_n|^p)}$;

b) $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx_1\dots dx_n}{(1+x_1^2+\dots+x_n^2)^p}$;

c) $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx_1\dots dx_n}{1+|x_1|^p+\dots+|x_n|^p}$?

d) При каких значениях $p_1,\dots,p_n>0$ сходится интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx_1\dots dx_n}{1+|x_1|^{p_1}+\dots+|x_n|^{p_n}}$?

Задача 3. Напомним определение бета-функции $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ и гамма-функции $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}$.

a) Вычислите $\int_0^\infty x^\alpha e^{-tx}dx$.

b) Докажите, что $B(a,b)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}dy}{(1+y)^{a+b}}$.

Подсказка: сделайте подстановку $x=\frac{y}{1+y}$.

c) Запишите $\Gamma(a)\Gamma(b)$ двойным интегралом в координатах x и y, и сделайте в нём замену координат на x и $t=y/x$.

d) Вычислите полученный интеграл как повторный, начиная с переменной t. Выведите отсюда, что $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Задача 4. Вычислите

a) $\int\limits_{\substack{x,y>0\\ x+y<1}} x^a y^b\,dx\,dy$, $a,\ b>0$;

b) $\int\limits_{\substack{x,y,z>0\\ x+y+z<1}} x^a y^b z^c\,dx\,dy\,dz$, $a,\ b,\ c>0$.