

## Занятие и задание 3

**Задача 1.** Приведите пример следующих  $\delta$ -образных последовательностей и нарисуйте их графики:

- а) пропорциональные характеристической функции отрезка;
- б) непрерывные кусочно линейные;
- в) кусочно квадратичные.

**Задача 2.** Дана функция  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой

$$1) \varphi(x) \geq 0, \quad 2) \text{Sign}(\varphi'(x)) = -\text{Sign}(x), \quad 3) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1.$$

Докажите, что  $\Delta_n : x \mapsto n\varphi(nx)$  —  $\delta$ -образная последовательность.

- Задача 3.** Докажите, что  $\Delta_n(x) = \frac{ne^{-n^2x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$  —  $\delta$ -образная последовательность, и нарисуйте её графики.

**Задача 4.** Найдите последовательности многочленов  $(p_n(x))_{n=0,1,2,\dots}$ , равномерно приближающие следующие функции на указанных отрезках:

- а)  $|x|$  на  $[-0.9, 0.9]$ ;  
*Подсказка: используйте  $|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)}$ .*
- б)  $\sin x$  на  $[-a, a]$  ( $a > 0$ );
- в)  $e^x$  на  $[-a, a]$  ( $a > 0$ );
- д)  $\ln(1 + x)$  на  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  и на  $[0.1, 9.9]$ .

Верно ли, что последовательности их производных равномерно сходятся?

- Задача 5.** Докажите, что на отрезке  $[-R, R]$  остаточный член в ряде Тейлора для синуса удовлетворяет оценке:

$$|\sin x - S_{2m-1}(x)| \leq \frac{R^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

где  $S_n(x)$  —  $n$ -ая частная сумма ряда Тейлора для синуса.

**Задача 6 (Почленное интегрирование рядов Тейлора).**

- а) Разложите в ряд Тейлора функцию  $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$  и докажите, что его частные суммы равномерно сходятся к  $f$  на любом отрезке  $|x| \leq a < 1$ .
- б) Та же задача для  $F(x) = \arcsin x$ .  
*Подсказка: сведите б) к а).*

- Задача 7.** Пусть  $|a| < 1$ . Докажите, что ряд

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$$

равномерно сходится на  $\mathbb{R}$  к  $\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2}$ . Оцените погрешность приближения частными суммами.

*Подсказка: используйте формулу Эйлера и геометрическую прогрессию.*