# Занятие и задание 26

**Задача 1.** Пусть $f : U \to V$ – диффеоморфизм ограниченных областей евклидова пространства, $\nu_f = f_*\lambda$ – соответствующий образ меры Лебега $\lambda$ на $U$. Это – мера на $V$: по определению, $\nu_f(A) = \lambda(f^{-1}(A))$. Докажите, что мера $\nu_f$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, и ее плотность (производная Радона–Никодима) равна якобиану обратного отображения $f^{-1}$.

**Задача 2.** Докажите, что заряд абсолютно непрерывен относительно заданной меры $\mu$, если и только если меры из его разложения Жордана тоже абсолютно непрерывны относительно меры $\mu$. Докажите, что в этом случае плотность (производная Радона–Никодима) заряда относительно меры $\mu$ равна разности плотностей мер из разложения Жордана.

Всюду ниже для любой (замкнутой) области $X$ в подпространстве евклидова пространства через $\lambda_X$ будем обозначать сосредоточенную на $X$ меру Лебега той же размерности, что и $X$. Для заданной точки $a$ через $\delta(a)$ обозначается атомарная $\delta$-мера веса 1, сосредоточенная в $a$.

**Задача 3.** Найдите разложение Хана следующих зарядов:

a) $2\delta(0) - \lambda_{[-1,1]} + a\lambda_{[0,2]}$ на отрезке $[-1, 2]$; $a \in \mathbb{R}$;

b) $\delta(0) - x\lambda_{[-1,1]} + (x-1)\lambda_{[0,2]}$ на $[-1, 2]$; $x$ – координата на отрезке;

c) $y\lambda_{0\times[-1,1]} - x\lambda_{[1,1]\times 0} + \delta(0)$ на квадрате $[-1, 1]^2$;

d) $\lambda_{0\times[-1,1]} - 2\lambda_{[-1,1]\times 0} + \lambda_{\{y\geq 0\}} - \lambda_{\{x\geq 0\}}$ на квадрате $[-1, 1]^2$.

**Задача 4.** Докажите абсолютную непрерывность и найдите производную Радона–Никодима

a) заряда из пункта 3a) по мере $\lambda_{[-1,2]} + \delta(0)$;

b) заряда из пункта 3b) по той же мере;

c) заряда из пункта 3c) по мере $\lambda_{[-1,1]^2} + \lambda_{0\times[-1,1]} + \lambda_{[-1,1]\times 0} + \delta(0)$;

d) заряда из пункта 3d) по той же мере.