Занятие и задание 25

Задача 1. Вычислите площадь под графиком функции Кантора (канторовой лестницы).

Задача 2. Пусть $K : [0,1] \to [0,1]$ – функция Кантора. Конечна ли площадь под графиком функции

a) 2^{-K}?

b) 3^{-K}?

c^*) При каких $\lambda > 0$ площадь под графиком функции λ^{-K} конечна?

Задача 3. Найдите интеграл от функции $f(x,s) = x^s$ по произведению меры Лебега на отрезке $x \in [0,1]$ и следующей меры μ на пространстве значений s:

a) μ – дискретная мера на множестве $\{1,\dots,n\}$, $\mu(j) = 1$ для любого $j = 1,\dots,n$;

b) μ – мера Стилтьеса на отрезке $[0,1]$, заданная производящей функцией

$$F(s) = \begin{cases} \frac{s}{2} & \text{при } s \le \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}(1-s) & \text{при } s \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Задача 4. Для любых $a \in [0,1]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$, найдите площадь фигуры в $\mathbb{C}$, заметаемой образами отрезка $[a,1] \subset \mathbb{R}$ при умножении на $e^{\lambda t}$, $t > 0$.

Задача 5. Интегрируемы ли по Лебегу следующие функции на квадрате $[-1,1]^2$:

a) $f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x-y}\right)$?

b) $f(x,y) = \frac{1}{(x-y)\ln|x-y|}$?

Задача 6. При каких значениях s следующие функции интегрируемы на квадрате $[-1,1]^2$:

a) $f(x,y) = \frac{1}{|x-y|^s}$

b) $f(x,y) = \left|y - \sin(\frac{1}{x})\right|^{-s}$

c^*) $f(x,y) = \operatorname{dist}\left((x,y), \left\{y = \sin(\frac{1}{x})\right\}\right)^{-s}$, где dist – расстояние до множества.

Задача 7. Существует ли тело вращения в $\mathbb{R}^3$, у которого площадь продольного сечения (проходящего через ось) конечна, а объем бесконечен?

Задача 8. Рассмотрим меру Бернулли на пространстве $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ последовательностей (a_n), $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \{0,1\}$, определённую как произведение мер на $\{0,1\}$, равных $\frac{1}{2}$ на 0 и 1. Найдите меру множества

a) последовательностей с конечным числом нулей;

b) периодических последовательностей;

c) последовательностей, содержащих хотя бы один набор n последовательных единиц.