Занятие и задание 23

Задача 1. Докажите, что для $f \geqslant 0$ из $\int_D f = 0$ следует, что $f = 0$ почти всюду.

Задача 2. Приведите пример последовательности функций из $L_1(D)$, сходящуюся поточечно, но не в $L_1(D)$.

Задача 3. Следует ли из равномерной сходимости последовательности функций сходимость в $L_1(D)$ для

a) $D = [a, b]$;

b) $D = \mathbb{R}$.

Задача 4. При каих значениях параметров следующие функции принадлежат $L_1((0, 1])$?

a) x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\ln(x)^\alpha / x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $x^\alpha \sin\left(x^\beta\right)$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Задача 5. При каих значениях параметров следующие функции принадлежат $L_1(\mathbb{R})$?

a) $(1 + x^2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $(1 + x^2)^\alpha \sin\left(x^\beta\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

Задача 6. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — измеримые по Лебегу подмножества отрезка $[0, 1]$. Предположим, что каждая точка отрезка $[0, 1]$ содержится не менее, чем в k из этих подмножеств. Докажите, что по крайней мере одно из E_i имеем меру, не меньшую k/n.

Подсказка: интеграл здесь поможет.

Задача 7. Пусть f, $g \in L_1(\mathbb{R})$.

a) Докажите, что их свёртка $f * g$ тоже принадлежит $L_1(\mathbb{R})$.

b) Докажите, что если при этом f или g ограничены, то $f * g$ непрерывна.

Задача 8. Пусть $p \geqslant 1$ — вещественное число. Определим множество $L^p([a, b])$, состоящее из классов совпадающих почти всюду функций f, для которых $|f|^p$ интегрируема по Лебегу на $[a, b]$.

a) Докажите, что $L^p([a, b])$ — векторное пространство, и выражение $|f| = \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p d\mu}$ определяет норму на нём.

b) Докажите полноту $L^p([a, b])$.