Занятие и задание 21

Задача 1. Пусть f, g — измеримые функции.

a) Докажите, что $|f|$ измерим.

b) Докажите, что $\min(f, g)$ и $\max(f, g)$ измеримы.

Задача 2. a) Докажите, что каждая измеримая функция может быть представлена равномерным пределом измеримых функций, принимающих счётное множество значений.

b) Всегда ли можно обойтись функциями с конечным набором значений?

Задача 3. Запишем точки отрезка $[0, 1]$ в виде бесконечных двоичных дробей. Пусть $S_k(x)$ — среднее арифметическое первых k цифр x для $x \in [0, 1]$.

Определим функцию "средний двоичный знак" $S(x)$ как предел последовательности S_k, в тех точках, где предел существует, и ноль там, где предел не существует.

a) Докажите, что $S(x)$ измерима

b) Докажите, что множество точек x, для которых предела $S_k(x)$ не существует, всюду плотно.

c) Какие значения принимает $S(x)$?

d^*) Докажите, что $S(x)$ почти всюду равна половине.

e^{**}) Докажите, что хаусдорфова размерность множества тех точек, где $\left|S(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ меньше 1 для всякого $\varepsilon > 0$.

Задача 4. Пусть f_n — последовательность измеримых функций.

a) Докажите, что множество точек, в которых эта последовательность сходится, измеримо.

b) Докажите, что функции $\sup_n f_n$ и $\inf_n f_n$ измеримы.

Задача 5. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывнвя функция, $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримые функции. Докажите, что $f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ — измеримая функция.