

Занятие и задание 20

Задача 1. Пусть $X_n \subset [0, 1]$ — множество чисел, у которых первые n цифр в троичной записи не равны 1 (но допустим хвост из 2).

Положим $f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \chi(X_n) dt$.

- а) Докажите, что последовательность f_n равномерно сходится.
- б) Докажите, что её предел равен функции Кантора.
- в) Докажите, что последовательность f'_n сходится почти всюду. Чему равен её предел?
- г) Для каждого $\varepsilon > 0$ найдите множество D , $\mu([0, 1] \setminus D) < \varepsilon$, на котором последовательность f'_n сходится равномерно.

Задача 2. Докажите, что следующие множества измеримы:

- а) множество точек разрыва произвольной функции;
- б) множество критических значений функции класса C^1 .

Задача 3. Приведите пример неизмеримой функции.

Задача 4. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция, B — борелевское множество. Верно ли, что

- а) $f^{-1}(B)$ измеримо?
- б) $f^{-1}(B)$ — борелевское множество?

Задача 5. Пусть f — измеримая функция, g — непрерывная функция. Верно ли, что

- а) $g \circ f$ — измеримая функция?
- б*) $f \circ g$ — измеримая функция?