

Занятие и задание 2

Задача 1. Докажите что алгебраические полярные координаты $(r, t) = (\sqrt{x^2 + y^2}, y/x)$ задают систему координат в верхней полуплоскости $x > 0$. Как она связана с обычной полярной системой координат?

Задача 2. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda - a^2)x^2 + \lambda y^2 = \lambda(\lambda - a^2)$$

Для $0 < \lambda < a^2$ это уравнение гиперболы с полюсами в $\pm a$ а для $a^2 < \lambda$ это уравнение эллипса с полюсами в $\pm a$

а) Докажите, что для любой (x, y) существуют $u \in (0, a^2), v \in (a^2, \infty)$, такие что $\lambda = u$ и $\lambda = v$ являются корнями этого уравнения.

б) Докажите, что (u, v) являются координатами в любом открытом квадранте.

Задача 3. Вычислите предел $(u/a^2, v)$ при $a \rightarrow 0$ и сравните его с задачей 1.

Задача 4. Вычислите меру Жордана следующих множеств:

а) прямоугольник на плоскости;

б) равносторонний треугольник на плоскости;

в) круг на плоскости;

г) правильный тетраэдр в пространстве;

д) шар в пространстве;

е) правильный симплекс в \mathbb{R}^4 ;

ж) шар в \mathbb{R}^4 .

Задача 5. Будут ли следующие подмножества прямой измеримы по Жордану?

а) Множество целых чисел.

б) Множество рациональных чисел отрезка.

в) Канторово множество — числа от 0 до 1, которые можно записать в троичной системе, не используя единицу (но допуская хвост из двоек).