

## Занятие и задание 19

**Задача 1.** Рассмотрим следующую функцию на отрезке. Запишем аргумент  $x \in [0, 1]$  бесконечной дробью в троичной системе и пусть  $(x)$  — фрагмент этой записи до первой единицы, включая её (в частности  $(x)$  совпадает с  $x$  при отсутствии там единиц). Заменяем в  $(x)$  все двойки на единицы, и положим  $K(x)$  равным числу с такой двоичной записью.

а) Докажите, что  $K(x)$  корректно определена и монотонна.

б) Нарисуйте график  $K(x)$ .

с) Докажите, что образ канторова совершенного множества относительно  $K$  — весь отрезок  $[0, 1]$ .

д) Докажите, что  $K$  тем не менее непрерывна.

е) Является ли  $K$  липшицевой?

**Задача 2.** Оцените сверху размерность Хаусдорфа канторова совершенного множества на отрезке.

**Задача 3.** Оцените сверху размерность Хаусдорфа следующих множеств на отрезке:

а) чисел без 7 в 16-ричной записи;

б) чисел без 2 и 3 в 8-ричной записи;

с) чисел без 11 в 3-ичной записи;

д) чисел без 1, 23 и 45 в 8-ричной записи.

**Задача 4.** Постройте подмножество отрезка  $[0, 1]$

а) континуальное, но размерности Хаусдорфа 0;

б\*) данной вещественной размерности Хаусдорфа  $0 < \lambda \leq 1$ .

**Задача 5.** а) Докажите, что размерность Хаусдорфа подмножеств отрезка не меняется при диффеоморфизмах отрезка.

б) Можно ли в этом утверждении заменить дифференцируемость на липшицевость?