

Занятие и задание 17

Задача 1. Докажите эквивалентность двух определений свёртки.

Задача 2. а) Докажите, что пространство быстро убывающих функций образует алгебру над \mathbb{R} относительно стандартных арифметических операций.

б) Замкнуто ли оно относительно дифференцирования?

в) Замкнуто ли оно относительно свёртки?

Задача 3. Пусть f – ограниченная непрерывная (не обязательно финитная) функция на \mathbb{R} , Δ_n – δ -образная последовательность. Верно ли, что

а) $f * \Delta_n \rightarrow f$?

б) $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на всей прямой?

в) $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на любом компакте?

д) Аналоги каких из пунктов а) – в) остаются верными для многомерного преобразования Фурье?

Задача 4. Найдите преобразование Фурье функции $\frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}$, пользуясь таблицей преобразований Фурье ниже.

Задача 5. Найдите свертки $f * g$ и их преобразования Фурье для следующих функций:

а) $f = g = \chi_{[-1,1]}$;

б) $f = \chi_{[a,b]}$, $g = \chi_{[c,d]}$;

в) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $g = \frac{\sin(ax)}{x}$;

д) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $g(x) = e^{-\frac{(ax+b)^2}{2}}$.

Таблица преобразований Фурье

$f(x)$	$\chi_{[-1,1]}$	$e^{-x^2/2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$g(ax)$	$g(x+b)$	$e^{cx}g(x)$
$\tilde{f}(y)$	$\frac{2\sin(y)}{y}$	$\sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}$	$\pi e^{- y }$	$\frac{1}{a}\tilde{g}\left(\frac{y}{a}\right)$	$e^{iby}\tilde{g}(y)$	$\tilde{g}(y+ic)$