Занятие и задание 16

Задача 1. Используя таблицу преобразований Фурье и замены в интеграле, найдите преобразование Фурье следующих функций:

a) $\chi_{[a,b]}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

b) $xe^{-\frac{x^2}{2}}$,

c) $(\sin(x)/x)^2$,

d) $\frac{\cos(x)}{1+x^2}$.

e) $P(x_1, \ldots, x_n)e^{-\frac{(Ax,x)}{2}}$, где матрица A задаёт положительно определённую квадратичную форму, а P – многочлен.

Задача 2*. a^*) Найдите преобразование Фурье функции e^{-ax^2}, где $\mathrm{Re}(a) > 0$.

b^*) Распространите полученный результат на случай преобразования Фурье функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = e^{-\frac{(Ax,x)}{2}}$, где A – комплексная симметрическая матрица, такая что ее вещественная часть задаёт положительно определенную квадратичную форму.

Задача 3*. Найдите преобразование Фурье следующих функций:

a^*) $\frac{e^{-|t|}}{\sqrt{|t|}}$,

b^*) $\mathrm{Sign(t)}\sqrt{|t|}e^{-|t|}$.

Задача 4. Докажите, что пространство быстро убывающих функций

a) содержит ненулевой элемент,

b) бесконечномерно.

Задача 5. Докажите эквивалентность двух определений свёртки.

Задача 6. a) Докажите, что пространство быстро убывающих функций образует алгебру над $\mathbb{R}$ относительно стандартных арифметических операций.

b) Замкнуто ли оно относительно дифференцирования?

c) Замкнуто ли оно относительно свёртки?

Задача 7. Пусть f – ограниченная непрерывная (не обязательно финитная) функция на $\mathbb{R}$, Δ_n – δ-образная последовательность. Верно ли, что

a) $f * \Delta_n \to f$?

b) $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на всей прямой?

c) $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на любом компакте?

d) Ответить на предыдущие вопросы для многомерного преобразования Фурье.

Задача 8. Напишите в явном виде формулу решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Таблица преобразований Фурье

$f(x)$	$\chi_{[-1,1]}$	$e^{-x^2/2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$g(ax)$	$g(x+b)$	$e^{cx}g(x)$
$\tilde{f}(y)$	$\frac{2\sin(y)}{y}$	$\sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}$	$\pi e^{-\lvert y\rvert}$	$\frac{1}{a}\tilde{g}\left(\frac{y}{a}\right)$	$e^{iby}\tilde{g}(y)$	$\tilde{g}(y+ic)$