Занятие и задание 14

Задача 1. При каких значениях α следующая функция f принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$:

a) $f = (1+r)^\alpha$,

b) $f = r^\alpha \chi_{\{r \leqslant 1\}}$,

c) r^α,

d) $(1+|xy|)^\alpha$, $n = 2$.

Задача 2. Пусть $f \in C^{n+1,0}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что $\widetilde{f}$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$, и $\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx$ сходится.

Задача 3. Найдите многомерное преобразование Фурье следующих функций:

a) $f(x_1, \ldots, x_n) = \chi_{\{|x_1|,\ldots,|x_n| \leq 1\}}$;

b) $f(x_1, \ldots, x_n) = e^{-\frac{1}{2}||x||^2}$;

c) $f(x_1, \ldots, x_n) = e^{-\frac{1}{2}(Ax,x)}$, A - заданная симметрическая матрица с положительными собственными значениями;

d) $f(x_1, x_2) = \chi_{\{|x_1+x_2|,|x_1-x_2| \leq 1\}}$.

Задача 4. Пусть финитная функция инвариантна относительно

a) группы всех вращений (ортогональных замен переменных, сохраняющих начало координат);

b) данной подгруппы G группы вращений.

Верно ли то же самое для ее преобразования Фурье?

Задача 5. Выразите преобразование Фурье произведения финитных функций $f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$ через преобразования Фурье самих функций.

Задача 6. Не медленнее, чем какая степень $||x||$ убывает преобразование Фурье функции, равной $||x||^2(1-||x||)^2$ при $||x|| \leq 1$ и 0 при $||x|| > 1$?