Занятие и задание 4

Задача 1. Пусть $I(y) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+y^2}$. При каких y функция I

a) принадлежит классу C^1?

b) голоморфна?

Задача 2. При каких y функция $I(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+y^2}$ принадлежит классу C^1?

Задача 3. Найдите $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^+} f(x,y)$, где $f(x,y) = x^y e^{-x}$.

Задача 4. Докажите, что для любого $a > 0$ существует такое $C \in \mathbb{R}$, что при $y \in [0,a]$ функция $Ce^{-x/2}$ мажорирует функцию $f_y(x) = x^y e^{-x}$ на $\mathbb{R}^+$.

Задача 5. Докажите, что функция

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}dx$$

принадлежит классу C^1

a) при $y > 1$,

b) при $y > 0$.

Задача 6. Докажите, что функция

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$$

голоморфна при $\mathrm{Re} z > 0$ (интегрирование ведётся по половине вещественной оси).

Задача 7. На каком отрезке $y \in [a,b]$ семейство $f_y(x) = x^y$ мажорируется функцией со сходящимся на $[1,+\infty)$ интегралом?

Задача 8. Докажите, что интеграл

$$I(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)dt$$

решает задачу $I^{(n+1)}(x) = f(x)$, $I(0) = \cdots = I^{(n)}(0) = 0$.

Задача 9 (Интегральное представление решения уравнения Эйри).

a) Пусть $L_y = D_y^2 - y$. Найдите $L_y e^{xy-\frac{x^3}{3}}$

b) Найдите функцию $g(x,y)$, для которой $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = L_y e^{xy-\frac{x^3}{3}}$.

c*) Докажите, что интеграл $I(y) = \int_\gamma e^{zy-\frac{z^3}{3}}dz$, взятый по контуру γ, составленному $\mathbb{R}^+$ и $e^{\frac{2\pi i}{3}}\mathbb{R}^+$, удовлетворяет *уравнению Эйри*: $I'' - yI = 0$.

Задача 10. Проверьте, что функция $J_0(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{1-x^2}}dx$ удовлетворяет *уравнению Бесселя* $f'' + \frac{1}{y}f' + f = 0$.