

## Занятие и задание 1

**Задача 1.** Пусть на плоскости задана параметрическая кривая  $(x(t), y(t))$ .

а) В окрестности каких точек её можно задать в виде  $y(x)$ ,  $x(y)$ ,  $r(\phi)$ ,  $\phi(r)$ ?

б) Выразите в соответствующих точках  $\frac{dr}{d\phi}$  через  $\frac{dy}{dx}$ .

в) Выразите в соответствующих точках  $\frac{d\phi}{dr}$  через  $\frac{dx}{dy}$ .

**Задача 2.** Запишите в полярных координатах *метрику* на плоскости — квадратичную форму  $(dx)^2 + (dy)^2$  на касательном пространстве.

**Задача 3.** Как с помощью метрики выразить угол между кривыми? Длину кривой?

**Задача 4.** а) В каких точках плоскости *сферические координаты* являются системой координат:

$$x = r \cos(\theta) \cos(\phi), \quad y = r \cos(\theta) \sin(\phi), \quad z = r \sin(\theta)?$$

б) Зафиксируем  $r$ . В каких точках  $\phi$  и  $\theta$  будут системой координат на сфере? Интерпретируйте  $\theta$  и  $\phi$  в терминах широты и долготы.

**Задача 5.** а) Запишите метрику на сфере в координатах  $\phi$  и  $\theta$ .

б) Перепишите эту же метрику в *проекции Меркатора*:

$$x = \phi, \quad y = \operatorname{arcth} \sin(\theta).$$

*Подсказка: вспомните, чему равна производная обратного гиперболического тангенса.*

в) Сохраняются ли в проекции Меркатора длины кривых? Углы между кривыми?