Листок 9. Мера и размерность

Анализ 4 модуль 2014, **срок сдачи 03.06**

Часть 1. Сходимость измеримых функций. Теорема Лузина

9◇1 Какие значения принимает функция “средняя десятичная цифра”:

$$f(0, x_1 ... x_n ...) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n x_k?$$

9◇2 Докажите, что предел в задаче 1 не существует на всюду плотном подмножестве единичного отрезка E.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ обладает *С-свойством*, если для любого ε существует такая непрерывная функция g, что

$$\mu\{x|f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Теорема **1** (Лузин)**.** Любая измеримая функция $f : E \to \mathbb{R}$ обладает С-свойством.

9◇3 Докажите, что характеристическая функция любого элементарного множества обладает С-свойством.

9◇4 Докажите, что характеристическая функция любого измеримого множества обладает С-свойством.

9◇5 Докажите, что любая простая функция обладает С-свойством.

9◇6 Докажите, что любая ограниченная измеримая функция равномерно приближается простыми

9◇7* Докажите теорему Лузина.
Подсказка: воспользуйтесь теоремой Егорова и задачами 3 – 6

9◇8 Докажите, что любая функция, обладающая С-свойством, измерима.

Часть 2. Мера Лебега и размерность Хаусдорфа на плоскости

9◇9 Докажите, что носитель произведения (двух мер) равен произведению носителей (этих мер)

9◇10 Найдите носитель меры Каратеодори, соответствующей функции Кантора.

9⋄11 **а)** Докажите, что график измеримой функции $E \to \mathbb{R}$ имеет двумерную меру Лебега 0.

б*) Докажите, что если график функции $E \to \mathbb{R}$ измерим, то он имеет двумерную меру Лебега 0.

9⋄12 Докажите, что график липшицевой функции $E \to \mathbb{R}$ имеет Хаусдорфову размерность 1.

9⋄13* Найдите Хаусдорфову размерность графика функции Кантора (Канторовой лестницы).

9⋄14* Постройте функцию $E \to \mathbb{R}$, график которой имеет Хаусдорфову размерность больше 1,99.