Листок 7. Комплексное преобразование Фурье

Анализ 3 модуль 2014, **срок сдачи 21.03**

7◇1 Пусть функция $f = u + iv$ голоморфна и ее производная непрерывна. Докажите, что форма $f(z)dz$ замкнута, пользуясь уравнениями Коши-Римана в вещественной форме: $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$.

7◇2 Докажите теорему о голоморфности несобственного интеграла как функции параметра, пользуясь уравнениями Коши-Римана в вещественной форме.

7◇3 Рассмотрим функцию f, голоморфную в полосе $\Pi_\rho = \{z | \,|\mathrm{Im}(z)| \le \rho\}$ и удовлетворяющую оценке:

$$|f(z)| \le \frac{1}{1+|z|^2},\ z \in \Pi_\rho.$$

Докажите, что ее преобразование Фурье $\tilde{f}$ экспоненциально убывает на бесконечности и найти показатели экспоненты.

7◇4* Пусть функция $f \in C(\mathbb{R}^+),\ \mathrm{supp}\, f \subset \mathbb{R}^+,\ \int |f|dx < \infty$. Докажите, что $\tilde{f}$ голоморфно в нижней полуплоскости.

7◇5 Пусть функция f финитная, $\mathrm{supp}\, f \subset [-l, l]$, и $\tilde{f}_a(\alpha) = \tilde{f}(\alpha + ia),\ \alpha \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\tilde{f}_a \in L_2(\mathbb{R})$, и оцените сверху $||\tilde{f}_a||$.

7◇6 В условиях задачи 5 докажите, что $|\tilde{f}(\alpha)| < Ce^{l\cdot|\mathrm{Im}(\alpha)|}$.

7◇7* (**Ослабленная версия теоремы Пэли-Винера**) Пусть функция g – целая, причем:

$$|g(\alpha)| < Ce^{l\cdot|\mathrm{Im}(\alpha)|}.$$

Кроме того, существуют непрерывная функция G и положительная функция F со сходящимся интегралом, для которых

$$|f(x+iy)| < G(y)F(x).$$

Докажите, что тогда g является преобразованием Фурье финитной функции с носителем, принадлежащим $[-l, l]$.