Листок 6. Преобразование Фурье

Анализ 3 модуль 2014, **срок сдачи 7.03**

6◇1 При наличии необходимых производных, докажите равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx + b'(y)f(b(y),y) - a'(y)f(a(y),y).$$

6◇2* **Интегральное представление решения уравнения Эйри.** Докажите, что интеграл $I(y) = \int_\gamma e^{zy-\frac{z^3}{3}}dz$, взятый по контуру $\gamma = \mathbb{R}^+ - e^{\frac{2\pi i}{3}}\mathbb{R}^+$ (разность понимается в гомологическом смысле, то есть как разность интегралов по соответствующим направленным лучам), удовлетворяет уравнению Эйри: $I'' - yI = 0$.
Подсказка: см. задание 9 семинара 11.

6◇3 Докажите, что если функция финитна и непрерывна, то ее преобразование Фурье голоморфно на всей плоскости.

6◇4 Дайте подробное доказательство леммы 2 из лекции 5:
Если $f \in C^{2,0}$, то $S_l(x) \to I(x)$ при $l \to \infty$.

6◇5 Докажите, что нормированное преобразование Фурье функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ равно $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$, и выведите отсюда, что что $\int_\mathbb{R} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$.
Подсказка: воспользуйтесь интегралом в комплексной области и тем, что нормированное преобразование Фурье сохраняет норму в L_2.

6◇6* Рассмотрим вещественный многочлен P, $\deg(P) > 0$, все корни которого просты и невещественны. Докажите, что вне нуля преобразование Фурье функции $\frac{1}{P}$ бесконечно дифференцируемо.

6◇7* **Формула Пуассона.** Пусть f — дважды дифференцируемая и достаточно быстро убывающая функция: $|f(x)| < \frac{C}{1+x^2}$.
Докажите для неё *формулу Пуассона*:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(n)e^{inx}$$

Подсказка: левая часть является периодической. Нужно только убедиться, что ее коэффициенты Фурье равны $\hat{f}(n)$. Не забудьте проверить абсолютную сходимость обеих частей равенства.

6◇8* Пусть функция f гладкая и финитная, причём $\mathrm{supp}(f) \subset \pi[-l, l]$

а***)** Докажите, что функция f выражается через значения ее преобразования Фурье $\tilde{f}(\alpha)$ на множестве $\frac{\mathbb{Z}}{l}$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi l} \sum_{\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} \chi_{[-l,l]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Подсказка: разложите f на отрезке в ряд Фурье

б***) Формула Котельникова.** Выразите $\tilde{f}$ в произвольной точке через значения $\tilde{f}$ в точках множества $\frac{\mathbb{Z}}{l}$.

6◇9* Приведите пример тригонометриечского ряда, который сходится поточечно, но не в $L_2[-\pi, \pi]$. Будет ли он рядом Фурье своего предела?