

**ЛИСТОК 5. РЯДЫ ФУРЬЕ В  $L_2$**   
Анализ 3 модуль 2014, срок сдачи **21.02**

**Часть 1**

- 5◊1** Продолжаются ли до непрерывных функционалов на  $L_2(\mathbb{R})$  следующие функционалы, заданные на  $C_2^0(\mathbb{R})$ :
- а)**  $f \mapsto f(0)$ ,
  - б)**  $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ ,
  - в)**  $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$ , для  $g \in C^0(\mathbb{R})$ .
- 5◊2** Докажите, что
- а)** полиномы Лежандра образуют базис по Риссу в  $L_2[-1, 1]$ ,
  - б\*)** функции  $1, x, \dots, x^k, \dots$  не образуют базиса по Риссу в  $L_2[-1, 1]$ .
- 5◊3** При каких значениях  $\alpha \in \mathbb{R}$  следующая функция представляет элемент  $L_2([-1, 1])$ , то есть является пределом последовательности непрерывных функций в соответствующей метрике?
- а)**  $|x|^\alpha$ ;
  - б\*)**  $|x|^\alpha \sin(1/x)$ .

**Часть 2**

**5◊4 Связь рядов Фурье и рядов Лорана**

Пусть задан набор вещественных чисел  $a_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , и числа  $q \in (0, 1)$ ,  $C > 0$ , для которых выполнено  $|a_k| < Cq^{-|k|}$ .

- а)** Докажите, что ряд  $F(z) = \sum a_k z^k$  сходится равномерно на любом компактном подмножестве области  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in (q, q^{-1})\}$ .
- б)** Разложите в ряд Фурье ограничение  $F|_{S^1}$  функции  $F$  на окружность  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

- 5◊5\*** При каком необходимом и достаточном условии на ряд Фурье по системе  $E$  (экспонентам) функция  $f$  из  $L_2[-\pi, \pi]$ , продолженная по периодичности на  $\mathbb{R}$ , продолжается в верхнюю полуплоскость до голоморфной ограниченной функции?

Продолжимость означает существование функции  $F(x + iy)$ ,  $y > 0$ , для которой семейство  $f_y : x \mapsto F(x + iy)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , сходится к  $f(x)$  в  $L_2[-\pi, \pi]$  при  $y \rightarrow 0$ .

5◊6\* Рассмотрим функцию  $f \in L_2(S^1)$  и положим

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \alpha k).$$

Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ , где предел понимается в  $L_2(S^1)$ . Выразите ответ через коэффициенты Фурье функции  $f$ .

*Подсказка: ответ зависит от того, будет ли отношение  $\frac{\alpha}{\pi}$  рациональным или нет.*

### Часть 3

5◊7 Дана функция  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой выполнено:

1)  $\varphi \geq 0$       2)  $I = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx < \infty$       3)  $\text{sign}(\varphi') = -\text{sign}(x)$ .

Пусть  $\psi = \frac{\varphi}{I}$ . Докажите, что  $\Delta_n : x \mapsto n\psi(nx)$  является  $\delta$ -образной последовательностью.

5◊8 Постройте  $\delta$ -образную последовательность вида  $C_n e^{-nx^2}$ .

*Подсказка: используйте равенство  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .*