Листок 4. Касательное расслоение

Анализ 2 модуль 2013 год,

4◇1 Пусть M — гладкое многообразие.
а) Докажите, что векторные поля образуют пучок.
б) Постройте векторное расслоение TM, сечениями которого являются векторные поля. Оно называется *касательным расслоением.*

4◇2 **а)** Пусть M компактно. Докажите, что TM *порождено своими сечениями*, то есть существует конечный набор векторных полей, которые в каждой точке порождают соответствующее касательное пространство.
б) Докажите, что TM тривиально как расслоение (изоморфно прямому произведению M на векторное пространство) тогда и только тогда, когда существуют $\dim(M)$ векторных полей, в каждой точке образующих базис соответствующего касательного пространства.

4◇3 Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — замкнутая кривая на плоскости. Векторное поле, не обращающееся в ноль на γ, запишем в полярных координатах как $(r(t), \phi(t))$, и определим его *вращение вдоль* γ как $(\phi(1) - \phi(0))/2\pi$.
а) Докажите, что вращение — целое число, постоянное при непрерывной деформации γ в области без нулей векторного поля.
б) Покроем картами северное и южное полушарие сферы S^2. Как связано вращение векторного поля на экваторе в этих картах?
в) Докажите, что всякое векторное поле на S^2 обращается в ноль, в частности, TS^2 не является тривиальным.

4◇4* Докажите, что всякое векторное поле на S^{2k} обращается в ноль.

4◇5 Докажите, что для следующих многообразий касательное расслоение тривиально:
а) тор $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ — решетка;
б***)** сфера S^3;
в***)** сфера S^7.

4◇6* Приведите пример многообразия, для которого существует векторное поле, не обращающееся в ноль, но касательное расстоение нетривиально.

4◇7* Докажите, что у сферы с g ручками касательное расслоение тривиально только при $g = 1$.