Листок 3. Дифференциальные формы

Анализ 2 модуль 2013 год,

3◇1 Докажите, что функция $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с заданными гладкими частными производными $f_i = \partial F/\partial x_i$ найдётся тогда и только тогда, когда $\partial f_i/\partial x_j = \partial f_j/\partial x_i$ для всех $1 \le i < j \le n$.

3◇2 Докажите, что для k-формы ω и векторных полей $v_0, \dots, v_k$ на M выполняется

$$\begin{aligned} d\omega(v_0, \dots, v_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i L_{v_i} \omega(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

3◇3 Пусть M — ориентированное многообразие размерности m в $\mathbb{R}^n$. Для $x \in M$ определим функцию на m-ках касательных векторов в x так. Пусть $v_1, \dots, v_m \in T_x M$, B — матрица координат этих векторов в любой из ориентированных карт, G — матрица Грама, $G_{ij} = (v_i, v_j)$, где скалярное произведение вычисляется в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\omega(x; v_1, \dots, v_m) = \mathrm{Sign}(\det(B))\sqrt{\det(G)}.$$

а) Докажите, что ω является m-формой. Она называется *формой объёма.*
б*) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — подмногообразие размерности k. Для $\varepsilon > 0$ пусть $M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ — множество точек, отстоящих от M на расстояние не больше ε, C_ε — объём $n-k$-мерного шара в $\mathbb{R}^{n-k}$ радиуса ε. Докажите, что предел $\mathrm{vol}(M_\varepsilon)/C_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ равен $\int_M \omega$,
в) Докажите, что ограничение формы

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge dx_{k+2} \dots \wedge dx_n$$

на сферу $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ в $\mathbb{R}^n$ совпадает с формой объёма.

3◇4 Пусть $\mathrm{Vect}(M)$ — векторное пространство бесконечно гладких векторных полей на M. Пусть на M определена метрика и, тем самым, форма объёма.

Для $A \in \mathrm{Vect}(M)$ определим *форму работы* ω_A, как 1-форму, значение которой в точке $x \in M$ на векторе u равно скалярному произведению $(A(x), u)$. Кроме того, определим *форму потока* ϕ_A, получаемую подстановкой поля A в форму объёма.

а) Докажите, что формы работы и потока задают изоморфизм $\mathrm{Vect}(M)$ с пространствами соответственно 1-форм и $(\dim M - 1)$-форм на M

б) Докажите, что форма работы градиента f равна дифференциалу f.

в) Докажите, что $d\phi_A$ равен произведению $\mathrm{div}\, A$ и формы объёма.

г) Пусть $M = \mathbb{R}^3$. Для $A \in \mathrm{Vect}(M)$ определим $\mathrm{rot}\, A$ как векторное поле, форма потока которого равна $d\omega_A$. Запишите $\mathrm{rot}\, A$ в координатах.

д) Докажите, что следующая последовательность является точной:

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{grad}} \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{rot}} \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Подсказка: воспользуйтесь лемой Пуанкаре.

е*) Пусть S — гладкая поверхность с краем в $\mathbb{R}^3$, гладкая кривая C — её край, dS —форма объёма на S, n — вектор нормали к к S. Выразите $\int_S (\mathrm{rot}\,(v), n) dS$ интегралом 1-формы по кривой C.

3◇5 Найдите коразмерность подпространства точных k-форм (образа d) в пространстве замкнутых k-форм (ядра d) для следующих многообразий:

а) окружности;

б) плоскости без точки;

в) плоскости без n точек;

г) n-мерного тора;

д) 2-мерной сферы;

е*) n-мерной сферы.

3◇6* Пусть M — бесконечно гладкое многообразие, $M^k = M \times \cdots \times M$ (всего k сомножителей), $\Delta \subset M^k$ — диагональ, состоящая из точек $(x, x, \ldots, x)$. Пусть $C^{\wedge k}$ — пространство кососимметрических функциий на M^k: для всякой $\sigma \in S_n$ выполняется $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \mathrm{Sign}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_k)$.

а*) Докажите, что всякая функция из $C^{\wedge k}$ имеет ноль кратности по крайней мере $k(k-1)/2$ на Δ.

б*) Установите изоморфизм факторпространства $C^{\wedge k}$ по подпространству функций с нулём кратности большей $k(k-1)/2$ на Δ с пространством $(k-1)$-форм на M так, чтобы дифференциал задавался как

$$df(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \mathrm{Sign}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$