Листок 2. Алгеброй гармонию

Анализ 1 модуль 2013 год,

Пусть $C^\infty(K)$ — кольцо гладких функций на подмножестве $K \subset \mathbb{R}^n$.

2◇1 Пусть $I \subset C^\infty(K)$ — собственный идеал.
а) Докажите, что для компактного K существует точка $x \in K$, в которой все функции из I обращаются в ноль
Подсказка: иначе постройте функцию, нигде не обращающуюся в ноль (например, используя сумму квадратов).
б) Докажите, что в этом случае всякий максимальный идеал в $C^\infty(K)$ совпадает с идеалом I_x, составленным функциями, обращающимися в ноль в некоторой точке $x \in K$.
в*) Верны ли утверждения предыдущих пунктов для $K = \mathbb{R}^n$?

2◇2 Пусть $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — кольцо гладких функций на $\mathbb{R}^n$. Найдите размерность пространств
а) A/I_x;
б) A/I_x^n;
в) I_x^k/I_x^n.

2◇3* Будут ли идеалы I_x^k конечнопорождены?

2◇4* Что изменится в задачах 1-3 для алгебры всех непрерывных функций?

Определение 1. Назовём *кокасательным пространством* в точке x и обозначим T_x^* факторпространство I_x/I_x^2.

2◇5 Будем говорить, что $\mathbb{R}$-линейное отображение $\Delta : A \to \mathbb{R}$ — *дифференцирование в точке* $x \in \mathbb{R}^n$, если $\Delta(fg) = f(x)\Delta(g) + g(x)\Delta(f)$.
а) Чему равно $\Delta(1)$?
б) Постройте спаривание пространства дифференцирований в точке x и кокасательного пространства T_x^*. Докажите, что оно невырождено.
в) Докажите, что всякое дифференцирование в точке x представляется линейной комбинацией частных производных в x.
г*) Постройте изоморфизм между дифференцированиями в точке x и классами параметрических кривых из точки x с точностью до близости в первом порядке малости.

2◇6 Будем говорить, что $\mathbb{R}$-линейное отображение $D : A \to A$ — *дифференцирование* алгебры A, если $D(fg) = fD(g) + gD(f)$.

а) Докажите, что всякое дифференцирование A представляется “в координатах” в виде $f_1\partial/\partial x_1 + \cdots + f_n\partial/\partial x_n$, где $f_i \in A$.
б) Докажите что коммутатор $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ двух дифференцирований алгебры A является дифференцированием A.
Подсказка: это верно для дифференцирований произвольных алгебр.
в) Запишите коммутатор двух векторных полей в координатах.

2◇7 Пусть $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение.
а) Докажите, что композиция с F задаёт гомоморфизм алгебр $F^* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^m)$.
б) Докажите, что для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ гомоморфизм F^* задаёт линейное отображение кокасательных пространств $T^*_{f(x)}$ в T^*_x.
в) Докажите, что композиция с F^* переводит дифференцирования в точке x в дифференцирования в точке $f(x)$. Как это отображение связано с предыдущим?

2◇8** Всякий ли гомоморфизм $C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^m)$ происходит из гладкого отображения $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$?

2◇9 Пусть $F(t)$ — гладкое отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, гладко зависящее от параметра t (фактически, $F(t)$ гладко отображает $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$). Предположим, что $F(0)$ — тождественное отображение.
а) Докажите, что производная по t гомоморфизма $F(t)^*$ при $t = 0$ является дифференцированием алгебры A. Назовём соответствующее векторное поле F'
б) Запишите векторное поле F' в координатах.
в) Докажите, что на любом компактном подмножестве $\mathbb{R}^n$ отображение $F(t)$ является диффеоморфизмом при малых t.
г***)** Пусть $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — два таких отображения. Докажите, что на любом компактном подмножестве $\mathbb{R}^n$ определено при малых t и и гладко зависит от t отображение

$$[F_1, F_2](t) = F_1(\sqrt{t})F_2(\sqrt{t})F_1(\sqrt{t})^{-1}F_2(\sqrt{t})^{-1}.$$

д***)** Докажите, что производная этого отображения будет коммутатором соответствующих векторных полей: $[F_1, F_2]' = [F_1', F_2']$.