Листок 10. Интеграл Лебега

Анализ 4 модуль 2014, **срок сдачи — экзамен**

10◇1 Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая кусочно-постоянная функция со скачками $v_j = f(a_j+0)-f(a_j-0)$. Пусть μ — мера Стильтьеса с производящей фунцией f.

Докажите, что любая функция $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ является μ-измеримой и найдите её интеграл Лебега-Стильтьеса $\int_0^1 \phi d\mu$.

10◇2* Пусть $K(x)$ — функция Кантора. Докажите, что носитель меры Стильтьеса с производящей функцией K — канторово совершенное множество.

10◇3* Докажите, что каждый положительный (неотрицательный на неотрицательных функциях) линейный непрерывный функционал Φ на нормированном пространстве $C([0,1])$ задаётся некоторой мерой μ по правилу

$$\Phi(f) = \int_0^1 f d\mu$$

Подсказка: определите μ на элементарных множествах и воспользуйтесь теоремой о продолжении меры.

10◇4* Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Назовём меру на E *вероятностной*, если $\mu(E) = 1$. Докажите, что пространство вероятностных мер на E *слабо компактно*: из любой последовательности μ_n можно выбрать *слабо сходящуюся* подпоследовательность μ_{n_k}

$$\forall\, f \in C(E),\ \int_E f\, d\mu_{n_k} \to \int_E f\, d\mu.$$

Подсказка: воспользуйтесь теоремой Рисса и сепарабельностью *пространства $C(E)$ — наличием счётного всюду плотного множества*

10◇5* **а*)** Докажите, что пространство L_2 на отрезке полно.

Подсказка: используйте доказательство полноты пространства L_1 на отрезке.

б*) Докажите эквивалентность двух определений пространства L_2 на отрезке: данного в начале семестра (как пополнения) и данного в конце (конструктивного).

Подсказка: воспользуйтесь предыдущим пунктом.