Листок 1. Многомерное интегрирование

Анализ 1 модуль 2013 год,

1◇1 Какие функции от переменной x будут
а) дифференцируемы как функции от координаты x^3?
б) интегрируемы как функции от координаты $\sqrt[3]{x}$?

1◇2 Вычислите меру Жордана следующих множеств:
а) симплекса $\{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \geq 0,\ \sum x_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$;
б*) правильного октаэдра (выпуклой оболочки центров граней куба) в $\mathbb{R}^n$;
в*) шара в $\mathbb{R}^n$.

Определение **1.** Будем говорить, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$ *имеет меру Лебега ноль*, если для всякого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным или счётным наборов шаров U_1, $U_2, \ldots$, для которых $\sum \mathrm{vol}(U_i) < \varepsilon$.

1◇3 Докажите, что свойство иметь меру Лебега ноль сохраняется при гладкой замене координат.

1◇4 **а)** Докажите, что конечное объединение множеств меры Лебега ноль имеет меру Лебега ноль.
б) Докажите, что счётное объединение множеств меры Лебега ноль (в частности, любое счётное множество) имеет меру Лебега ноль.
в) Верно ли это для континуального объединения?

1◇5** Докажите *критерий Лебега* интегрируемости функции. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Жордану множество. Тогда функция интегрируема по Риману на D тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега ноль.