Лекция 9. Аппаратные свойства преобразований Фурье

1. Формула Планшереля для преобразования Фурье от функций многих переменных.

Теорема 1 *Пусть* $f \in C^{n+2,0}(\mathbb{R}^n)$*. Тогда* $\tilde{f}(\alpha)$ *определена для всех* α*, и*

$$||\tilde{f}||^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}||f||^2.$$

Доказательство Рассмотрим куб $K_l = (l[-\pi,\pi])^n$ такой, что $\operatorname{supp} f \in K_l$. Разложим $f|_{K_l}$ в ряд Фурье:

$$f|_{K_l} = \frac{1}{(2\pi l)^n}\sum_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}^n}{l}} \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}.$$

Тогда

$$||f||^2 = \frac{1}{(2\pi l)^n}\sum_{\frac{\mathbb{Z}^n}{l}} |\tilde{f}(\alpha)|^2 = \sigma_l,$$

$$|\tilde{f}(\alpha)|^2 \le \frac{C}{1+r^{n+1}},\ r = |\alpha|.$$

σ_l –“интегральная сумма” для $\frac{1}{2\pi^n}\int |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha$

$$\sigma_l = \sigma_l^1 + \sigma_l^2,\ \sigma_l^1 \sim \frac{1}{(2\pi l)^n}\sum_{\frac{\mathbb{Z}^n}{l}\cap\{|\alpha|\le N\}} |\tilde{f}(\alpha)|^2,\ \sigma_l^2 \sim \frac{1}{(2\pi l)^n}\sum_{\frac{\mathbb{Z}^n}{l}\setminus\{|\alpha|\le N\}} |\tilde{f}(\alpha)|^2$$

.

При достаточно большом N, $\sigma_l^2 < \frac{\varepsilon}{3}$ (замена ряда сходящимся интегралом)

$$\int |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha = I_1 + I_2,\ I_1 = \int_{|\alpha|\le N} |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$I_2 = \int_{|\alpha|\ge N} |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha \le \frac{\varepsilon}{3},$$

поскольку интеграл сходится. Далее, $\sigma_l^1 \to I_1$ при $l \to \infty$, поскольку интегральная сумма сходится к интегралу по отрезку по теореме Римана. □

2. Формула обращения.

Теорема 2 *Пусть* $f \in C^{n+2,0}(\mathbb{R}^n)$*.* $\forall x \in \mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Тот же выбор l. При $x \in K_l$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi l)^n} \sum_{\alpha \in \frac{\mathbb{Z}^n}{l}} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} = S_l(x).$$

Хотим:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = I(x).$$

$S_l(x)$ – интегральная сумма для интеграла $I(x)$. Доказательство сходимости $S_l(x) \to I(x)$ при $l \to \infty$ – такое же, как и выше.

3. Продолжение на все $L_2(\mathbb{R}^n)$.

По формуле Планшереля, $\mathcal{F}$ – изометрия с точностью до множителя. Пространство $C^{n+2,0}$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$. По теореме лекции 6, продолжаем $\mathcal{F}$ с $C^{n+2,0}$ на $L_2(\mathbb{R}^n)$ как изометрию. Равенство Планшереля и формула обращения получаются предельным переходом.

4. Дифференцируемость и убывание.

Коэффициенты Фурье m раз дифференцируемой функции убывают как $|k|^{-m}$. Аналогичным свойством обладает преобразование Фурье.

Теорема 3 *Пусть преобразование Фурье функции $f^{(m)}$ ограничено:*

$$|\mathcal{F}(f^{(m)})| < C,$$

и функция вместе со всеми производными до порядка m стремится к нулю на бесконечности. Тогда при $|\alpha| \geq 1$,

$$|\tilde{f}(\alpha)| < \frac{C}{|\alpha|^m}. \tag{1}$$

Доказательство Похожая теорема уже доказана в лекции 5, только там функция f была финитна.

Индукция по m. База: $m = 1$. Имеем

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = \int f'(x) e^{-i\alpha x} dx = \int e^{-i\alpha x} df(x) = i\alpha \int f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \mathcal{F}(f).$$

Следовательно,

$$|\tilde{f}(\alpha)| = \frac{|\tilde{f}'(\alpha)|}{|\alpha|}.$$

Шаг индукции состоит в применении этого неравенства к производным до порядка m и дает (1). $\square$

5. Убывание и дифференцируемость.

Справедлива обратная теорема: убывание преобразования Фурье функции из $L_2(\mathbb{R})$ на бесконечности со скоростью $c|\alpha|^{-m}$ влечет m-кратную дифференцируемость функции. Мы не будем доказывать это утверждение, а докажем родственный, существенно более полезный факт.

6. Пространство быстро убывающих функций.

Определение 1 *Функция на $\mathbb{R}$ называется быстро убывающей, если она бесконечно дифференцируема и убывает на бесконечности быстрее любой степени модуля x. Пространство всех таких функций называется пространством Шварца и обозначается $\mathcal{S}$.*

Теорема 4 *Пространство быстро убывающих функций отображается на себя преобразованием Фурье.*

Доказательство Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{S}$. Очевидно, она принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ (докажите!) Она бесконечно дифференцируема. Следовательно, ее преобразование Фурье убывает быстрее любой степени на бесконечности. Докажем, что для любой функции $f \in \mathcal{S}$ ее преобразование Фурье бесконечно дифференцируемо. Действительно, функция f убывает быстрее любой степени на бесконечности. Тем же свойством обладает функция $x^m f(x)$ для любого натурального m. Следовательно, все функции

$$g_k = (ix)^k f(x) e^{-ix\alpha}$$

мажорируются при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ функцией $\mathcal{F}(x) = \frac{C_k}{1+x^2}$. Интеграл этой функции сходится. Значит, интеграл

$$I_k(\alpha) = \int (ix)^k f(x) e^{i\alpha x} dx$$

допускает дифференцирование по α под знаком интеграла. Это дает:

$$I_{k+1}(\alpha) = I'_k(\alpha).$$

С учетом того, что $I_0 = \tilde{f}$, это доказывает теорему. □

Аналогично определяется пространство Шварца и доказывается теорема 4 для функций многих переменных.