Лекция 8. Преобразования Фурье для функций многих переменных (продолжение)

1. Ряды Фурье для стандартного тора

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$$

Теорема 1 $\{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}^n\}$ *– базис Рисса в* $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство $< e^{ikx}, e^{ilx} >= \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(k-l)x} dx = \delta_{k,l}$. Последнее равенство доказывается с помощью повторного интегрирования. □

Разложение в ряд Фурье (следствие теоремы Рисса).

Теорема 2 *Для любого* $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$,

$$f(x) = \sum a_k e^{ikx},$$

$a_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx$. *Сходимость понимается в* $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство Следует из теоремы Рисса и того, что

$$||e^{ikx}||^2 = (2\pi)^n.$$

□

2. Ряды Фурье для растянутого тора.

$$\mathbb{T}^n_l = \mathbb{R}^n / 2\pi l \mathbb{Z}^n$$

Рассмотрим гомотетию:

$$\Phi : \mathbb{T}^n_l \to \mathbb{T}^n, \ x \mapsto \frac{x}{l}$$

Возникает отображение:

$$\Phi^* : L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n_l),$$
$$f \mapsto f \circ \Phi, \ f \in L_2(\mathbb{T}^n), \ f \circ \Phi \in L_2(\mathbb{T}^n_l).$$

Это отображение – изометрия со сжатием:

$$||f \circ \Phi||^2 = l^n ||f||^2$$

Ортогональные функции переходят в ортогональные, плотные множества – в плотные множества, базис Рисса – в базис Рисса.

Следствие 1 $\{e^{ik\frac{x}{l}} | k \in \mathbb{Z}^n\}$ *– базис Рисса в* $L_2(\mathbb{T}^n_l)$;

$$||e^{ik\frac{x}{l}}||^2 = (2\pi l)^n$$

Следствие 2 $\forall f \in L_2(\mathbb{T}_l^n)$ *справедливо равенство:*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\frac{x}{l}}, \tag{1}$$

$$a_k = \frac{1}{P(2\pi l)^n} \int_{\mathbb{T}_l^n} f(x) e^{-i\frac{k}{l}x} \tag{2}$$

сходимость в $L_2(\mathbb{T}_l^n)$.

Следствие 3 $||f||^2 = \sum_{\mathbb{R}^n} |a_k|^2 (2\pi l)^n$

3. Переход на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f \subset 2\pi l[-1,1]^n = K_l$. Тогда в $L_2(K_l)$ справедливы формулы (1) , (2). Пусть f – финитная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Положим:

$$\tilde{f}(\alpha) = \int f(x) e^{-\alpha x} dx.$$

Тогда (1) и (2) дают:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi l)^n} \sum_{\frac{\mathbb{Z}^n}{n}} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x}.$$

$$||f||^2 = \frac{1}{(2\pi l)^n} \sum_{\frac{\mathbb{Z}^n}{n}} |\tilde{f}(\alpha)|^2$$

4. Дифференцирование и убывание коэффициентов Фурье.

Теорема 3 $f \in C^m(\mathbb{T}^n) \Rightarrow |a_k| < C|k|^{-\frac{m}{2}}$. *m четно.*

Лемма 1 *Пусть* $c_{k,m}$ *–* k*-й коэффициент Фурье от* $D^m f, a_k \sim f$. *Тогда*

$$c_{k,m} = (ik)^m a_k.$$

Доказательство Индукция по векторам m, упорядоченным лексикографически.

$$c_{k,e_j} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^m} D^j f e^{-ikx} dx = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int f(D^j e^{-ikx} dx) = \frac{ik_j}{(2\pi)^n} \int f e^{-ikx} dx.$$

$\square$

Доказательство Теоремы 3.

$$f = \sum a_k e^{ikx}$$

$$\Delta f = -\sum a_k |k|^2 e^{ikx}$$

$$\Delta^{\frac{m}{2}} f = -\sum a_k |k|^m e^{ikx}$$

$$\Delta^{\frac{m}{2}} f \in C(\mathbb{T}^n) \Rightarrow |a_k||k|^m < C,\ |a_k| < C|k|^{-m}.$$

$\square$

5. Суммирование по решетке и абсолютная сходимость рядов Фурье.
При каком $m = m(n)$ сходится ряд $\sum_{\mathbb{Z}^n \setminus 0} |k|^{-m}$?
Сходимость ряда равносильна сходимости интеграла

$$\int_{r \geq 1} r^{-m} dx = C \int_{r \geq 1} r^{-m+n-1} dr.$$

Интеграл сходится при $n - (m+1) < -1,$ т.е. при $m < n.$

Теорема 4 $f \in C^{n+1}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow$ *ряд Фурье сходится к f абсолютно и равномерно.*

Доказательство По теореме 3, коэффициенты Фурье функции f допускают оценку сверху:

$$|a_k| < C|k|^{-(n+1)}.$$

Ряд $\sum_{\mathbb{Z}^n} C|k|^{-(n+1)}$ сходится. Следовательно, ряд $\Sigma = a_k e^{ikx}$ сходится абсолютно и равномерно. Обозначим предельную функцию через $S(x)$. По теореме Рисса, ряд Σ сходится к функции f в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $f \equiv S$, и ряд Фурье функции f сходится к ней абсолютно и равномерно. $\square$

Теорема 5 *Если $f \in C^{n+2,0}(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\tilde{f}(\alpha) = \int f(x) e^{i\alpha x} dx$$

существует при всех α и

$$|\tilde{f}(\alpha)| \leq \frac{C}{1 + |\alpha|^{n+1}}.$$

Доказательство Доказательство получается с помощью интегрирования по частям индукцией по m. $\square$