Лекция 6. Ряды и преобразования Фурье для голоморфных функций.

1. Изометрии и их продолжение.

Теорема 1 *Рассмотрим гильбертово пространство H и плотное множество E в нем. Пусть $\mathcal{F} : E \to E'$ – линейный оператор, сохраняющий норму (изометрия). Тогда он однозначно продолжается до изометрии (снова обозначаемой $\mathcal{F}$): $H \to H$.*

2. Продолжение нормированного преобразования Фурье на $L_2(\mathbb{R})$.

Предложение 1 *Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которой $\int |f|^2 dx < \infty$, принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство Приблизим f последовательностью $f_n \in C^0$ с помощью срезающих функций. □

Теорема 2 *Нормированное преобразование Фурье $\hat{\mathcal{F}} : C^{2,0} \to E' \subset H$ продолжается на все $L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство Набросок доказательства. Функции из E' – квадратично убывающие (почему?) По предложению 1, $E' \subset L_2(\mathbb{R})$. По теореме Планшереля, $\hat{\mathcal{F}}$ – изометрия. По теореме 1, она продолжается на все $L_2(\mathbb{R})$. □

3. Напоминания из комплексного анализа.

- Определение голоморфных функций.
- Интеграл Коши.
- Интегральная теорема Коши.

4. Ряды Фурье для голоморфных функций.

Теорема 3 *Коэффициенты Фурье голоморфной функции на окружности убывают экспоненциально. Более подробно, пусть функция f голоморфна в полосе $|\,Im\ z| < \delta$, и $\max_{|\ Im\ z| \le \delta} |f(z)| = M$. Тогда f_k – k-й коэффициент Фурье функции f – удовлетворяет неравенству:*

$$|f_k| \le M e^{-\delta |k|}. \tag{1}$$

Доказательство По известной формуле,

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Пусть $k < 0$. рассмотрим прямоугольник Π с вершинами $-\pi, \pi, \pi + i\delta, -\pi + i\delta$ и пусть Γ – его положительно ориентированная граница. Докажем, что

$$f_k = \int_{\sigma+i\delta} f(z)e^{-ikz}dz.$$

Действительно, по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} f(z)e^{-ikz}dz = 0. \tag{2}$$

Но Γ – ориентированная граница прямоугольника Π, правая вертикальная сторона которого получается из левой переносом на 2π. А подинтегральная функция в интеграле (2) 2π-периодична. Поэтому ее интегралы по (противоположно ориентированным) вертикальным сторонам взаимно уничтожаются, а интегралы по горизонтальным сторонам равны:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-ikz}dz = \int_{-\pi+i\delta}^{\pi+i\delta} f(z)e^{-ikz}dz.$$

Но

$$\max_{[-\pi+i\delta,\pi+i\delta]} |f(z)e^{-kz}| = Me^{-ik\delta}.$$

Отсюда следует (1). □

5. Функция Гаусса – неподвижная точка преобразования Фурье.

Теорема 4 *Функция Гаусса $f_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ – неподвижная точка нормализованного преобразования Фурье.*

Доказательство Доказательство получается выходом в комплексную область, и дается прямым вычислением.

$$\hat{f}_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}-i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2i\alpha x-\alpha^2)}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}dx = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2}dx := e^{-\frac{\alpha^2}{2}}C(\alpha).$$

Наблюдение: 1 *$C(\alpha)$ не зависит от α и равно* 1!

Действительно,
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2} dx = \int_{\mathbb{R}+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

С помощью интегральной теоремы Коши докажите, что
$$\int_{\mathbb{R}+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$
и тем самым, $C(\alpha)$ действительно не зависит от α. Итак, для $C = C(\alpha)$
$$\hat{f}_0(z) = Cf_0(z),$$
то есть функция f_0 – собственная функция для преобразования Фурье с положительным собственным значением. Но преобразования Фурье – изометрия. Следовательно, $C = 1,\ \hat{f}_0 = f_0$.

Попутно мы доказали, что
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$
(формула Эйлера-Пуассона). □

6. Вычисление преобразования Фурье с помощью вычетов.

Теорема 5 *Пусть P – вещественный многочлен с невещественными простыми корнями. Тогда*
$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{P}\right)(\alpha) = \begin{cases} 2\pi i \sum_{Im a>0} res_a \frac{e^{-i\alpha z}}{P(z)}, & \alpha < 0 \\ 2\pi i \sum_{Im a<0} res_a \frac{e^{-i\alpha z}}{P(z)}, & \alpha > 0. \end{cases}$$