Лекция 5. Преобразование Фурье.

1. Определение и основные результаты.
Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Преобразованием Фурье функции f называется функция

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x) t^{-i\alpha x} dx \tag{1}$$

Нормированным преобразованием Фурье функции f называется функция

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f} \tag{2}$$

Из формулы не очевидно, что преобразование Фурье существует для любой функции $f \in L_2\mathbb{R}$. Это доказано ниже.

Основные результаты сегодняшней лекции таковы:

Теорема 1 (Равенство Планшереля) $f \in L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$, *и* $||f|| = ||\hat{f}||$.

Теорема 2 *Формула обращения:* $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Мы докажем эти теоремы сначала для случая, когда функция f – финитная дважды гладкая, а затем распространим их на все $L_2(\mathbb{R})$.

Преобразование Фурье является континуальным аналогом ряда Фурье. Ряды Фурье определены для функций на окружности, а преобразование Фурье – для функций на прямой. Второе получается из первого предельным переходом по семейству окружностей, длина которых стремится к бесконечности.

2. Убывание преобразования Фурье финитной гладкой функции.

Теорема 3 *Преобразование Фурье финитной функции класса C^m убывает не медленнее, чем $|x|^{-m}$.*

Эта теорема доказывается точно так же, как ее аналог для рядов Фурье.
Доказательство Преобразование Фурье переводит дифференцирование в умножение на $i\alpha$:

$$\tilde{f}'(\alpha) = i\alpha \tilde{f}(\alpha). \tag{3}$$

Эта формула доказывается с помощью интегрирования по частям. Интегралы пишутся по прямой (и это не указано в обозначениях), но берутся по отрезку, вне которого функция f равна нулю. Возникающие двойные подстановки исчезают, поскольку

$f = 0$ на концах отрезка. Иногда преобразование Фурье обозначают символом $\mathcal{F}$, чтобы избежать разночтений. Имеем:

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = \int f'(x)e^{-i\alpha x}dx = \int e^{-i\alpha x}df(x) = -\int f(x)de^{-i\alpha x}dx = i\alpha \int f(x)e^{-i\alpha x}dx = i\alpha \mathcal{F}f(\alpha).$$

Отсюда следует:

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{i\alpha}\mathcal{F}(f')(\alpha).$$

Индукцией по m получаем:

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{(i\alpha)^m}\mathcal{F}(f^{(m)})(\alpha).$$

Но функция $\mathcal{F}(f^{(m)})$ ограничена, поскольку $f^{(m)}$ непрерывна и финитна. $\square$

Следствие 1 *Если $f \in C^{2,0}$, то существует C:*

$$|\tilde{f}(\alpha)| < \frac{C}{1+\alpha^2}. \tag{4}$$

3. Ряды Фурье на "длинной" окружности.

Окружность изображается отрезком с отождествленными концами. Другое представление: функции на окружности "длины T" изображаются T-периодическими функциями на прямой. Этим представлением мы и воспользуемся.

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с периодом $2\pi l$, и найдем ее разложение в ряд Фурье по базису, который будет сейчас построен. Функция $g(x) = f(xl)$ имеет период 2π и разлагается в классический ряд Фурье

$$g(x) = \Sigma_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx}. \tag{5}$$

Множители перед ix в показателе экспоненты называются волновыми числами. В обычном ряде Фурье множество волновых чисел совпадает с $\mathbb{Z}$.

По определению функции g, при $|x| \le \pi l$,

$$f(x) = g\left(\frac{x}{l}\right) = \Sigma g_k e^{ik\frac{x}{l}} = \Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}} c_\alpha e^{i\alpha x} \tag{6}$$

Волновые числа в последнем ряде пробегают множество $\frac{\mathbb{Z}}{l}$. При большом l это множество гораздо гуще, чем $\mathbb{Z}$. Допуская вольность речи, можно сказать, что при $l \to \infty$ оно стремится к $\mathbb{R}$.

Формула (6) показывает, что векторы $e^{i\alpha x}$, $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$, образуют базис в $L_2([-\pi l, \pi l])$. Их нормы равны $\sqrt{2\pi l}$. Следовательно, при $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$,

$$c_\alpha = \frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

Отметим, что при $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$,

$$c_\alpha = \frac{1}{2\pi l}\tilde{f}(\alpha) \tag{7}$$

Равенство Планшереля для f имеет вид

$$||f||^2 = 2\pi l \ \Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}}|c_\alpha|^2. \tag{8}$$

Разложение f в ряд Фурье дается формулами (6), (7).

4. Предельный переход: эвристическое доказательство равенства Планшереля и формулы обращения.

Фиксируем финитную функцию $f \in C^{2,0}$ с носителем $\mathrm{supp}\, f \subset [-\pi l_0, \pi l_0]$, и для каждого $l > l_0$ рассмотрим ограничение функции f на отрезок $[-\pi l, \pi l]$. Эти ограничения формально – разные функции, но мы будем все их обозначить через f.

Докажем равенство Планшереля:

$$||f|| = ||\hat{f}||.$$

Для этого достаточно доказать:

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi}||\tilde{f}||^2 \tag{9}$$

В силу (8) и (7),

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}}|\tilde{f}(\alpha)|^2 := \Sigma_l. \tag{10}$$

Выражение Σ_l – это "бесконечная интегральная сумма" для интеграла

$$\frac{1}{2\pi}||\tilde{f}||^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha := I$$

Сумма соответствует разбиению прямой на отрезки длины $\frac{1}{l}$ с вершинами в точках множества $\frac{\mathbb{Z}}{l}$. С одной стороны, эта сумма стремится к интегралу (это еще надо доказать!), с другой последовательность Σ_l стационарна (не зависит от l). Это "доказывает" (9).

Аналогично доказывается формула обращения. В силу (6), при $|x| \le \pi l$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}}\tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x} := S_l(x).$$

Выражение $S_l(x)$ – "бесконечная интегральная сумма" для интеграла

$$I(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Переходя к пределу, как и выше (этот переход тоже нужно обосновать), получаем формулу обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \tag{11}$$

5. Формальное доказательство.

Лемма 1 *Если $f \in C^{2,0}$, то $\Sigma_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha$ при условии: $f \in C^{2,0}$.*

Лемма 2 *Если $f \in C^{2,0}$, то $S_l(x) \to I(x)$ при $l \to \infty$.*

Из предыдущих рассуждений и леммы 1 следует теорема Планшереля, а из леммы 2 – формула обращения.

Доказательство [Леммы 1]. Если бы интеграл I был собственным, стремление интегральной суммы к интегралу было бы следствием теории интеграла Римана. Нам нужно “справиться” с несобственным интегралом. Это делается с помощью мажорирования.

В силу следствия 1, существует $C > 0 : |\tilde{f}(\alpha)| < C(1+\alpha^2)^{-1}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и такое N, что

$$\frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}\setminus[-N,N]}|\tilde{f}(\alpha)|^2 < \frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}\setminus[-N,N]}\frac{C}{(1+\alpha^2)^2} < C\int_{|\alpha|\geq N-\frac{1}{l}}\frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^2} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\left|\int_{|\alpha|\geq N}|f(\alpha)|^2 d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем l столь большое, что

$$\left|\frac{1}{l}\Sigma_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}|,\ \alpha|\leq N}|\tilde{f}(\alpha)|^2 - \int_{|\alpha|\leq N}|\tilde{f}(a)|^2 dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда $\left|\Sigma_l - ||\tilde{f}||^2\right| < \varepsilon.$ □

Аналогично доказываетсмя лемма 2.

Вывод. Доказаны теоремы 1 и 2: равенство Планшереля и формула обращения для финитных гладких функций f.

Цель: доказать то же для всех $f \in L_2$.

6. Операторы и их продолжение.

Определение 1 $A : H \to H$ *– линейный оператор, если* $A(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha A(\xi) + \beta A(\eta)$.

Определение 2 *A – изометрия, если $||A\xi|| = ||\xi||$ $\forall \xi \in H$ A – линейный по умолчанию.*

Теорема 4 *Пусть H – гильбертово пространство, E – плотное множество в H, $A : E \to E' \subset H$ – изометрия. Тогда A продолжается на H до изометрии $\mathcal{A} : H \to H$.*

Доказательство [triv]. Пусть $x \in H,$ $(x_r) \subset E,$ $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Пусть $y_n = Ax_n$. Тогда (x_n) – фундаментальная последовательность $\Rightarrow$ (y_n) – тоже фундаментальная последовательность. Пусть $y = \lim_{n\to\infty y_n}$. Положим $\mathcal{A}(x) = y$.

Упражнение 1 *$\mathcal{A}$ корректно определено: y зависит только от x, а не от $x_n \to x$.*

$\mathcal{A}$ – изометрия, поскольку $||y_n|| = ||x_n|| \Rightarrow ||y|| = ||x||$. $\square$

Тем самым, преобразование Фурье продолжается на все пространство $L_2(\mathbb{R})$ как изометрия, то есть на всем этом пространстве справедлива формула Планшереля.

Формула обращения распространяется на все пространство $L_2(\mathbb{R})$ аналогично. А именно, пусть $S : f(x) \mapsto f(-x)$ -оператор обращения аргумента. Формула обращения эквивалентна следующей:

$$\mathcal{F}^2 = 2\pi S.$$

Операторы в правой и левой части этого равенства - изометрии. Их совпадение на плотном множестве $C^{2,0}$ влечет их совпадение на всем пространстве $L_2(\mathbb{R})$.