

Лекция 4. Интегралы, зависящие от параметра

1. Quiz 1 (15 минут)

2. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Имеем:

$$f : K = I \times I \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1(K). \quad (1)$$

Рассмотрим

$$g(y) = \int_0^1 f(x, y) dx. \quad (2)$$

Верно ли, что $g \in C^1(K)$? ДА!

Теорема 1 (Дифференцирование под знаком интеграла) В условиях (1), (2), $g \in C^1(K)$ и $g'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$.

3. Что легче, дифференцировать или интегрировать?

Теорема 2 (Интегрирование под знаком интеграла) Рассмотрим $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C^0$ Пусть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varphi, \quad \psi(y) = \int_0^1 \varphi(x, y) dx \quad \Psi'(y) = \psi \quad \Psi(0) = 0. \quad (3)$$

Тогда

$$\Psi(y) = \int_0^1 \Phi(x, y) dx \quad (4)$$

[Можно интегрировать под знаком интеграла]

Доказательство теоремы 2. Повторный интеграл непрерывной функции по прямоугольнику не зависит от порядка интегрирования. \square

Более подробное доказательство.

По формуле Ньютона-Лейбница,

$$\Phi(x, y) = \int_0^y \varphi(x, t) dt, \quad \Psi(y) = \int_0^y \psi(t) dt.$$

Тогда

$$\Psi(y) = \int_0^y \psi(t) dt = \int_0^y dt \int_0^1 \varphi(x, t) dx = \int_0^1 dx \left(\int_0^y \varphi(x, t) dt \right) = \int_0^1 \Phi(x, y) dx,$$

ч.т.д.

Но если можно интегрировать под знаком интеграла, значит можно и дифференцировать! Это доказывает теорему 1.

4. Более подробное доказательство теоремы 1.

Доказательство Положим

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x, y), \quad f(x, y) = \Phi(x, y), \quad g(y) = \Psi(y).$$

Тогда:

$$\psi(y) = \int_0^1 \varphi(x, y) dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \quad \Psi(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \Phi(x, y) dx$$

В силу Теоремы 2,

$$\Psi'(y) = \psi(y).$$

Значит,

$$g'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

□

Следствие 1 При наличии необходимых производных,

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx + b'(y) f(b(y), y) - a'(y) f(a(y), y).$$

Доказательство Применим теорему о дифференцировании сложной функции к $F(a, b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$ и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница. □

5. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Определение 1 Скажем, что функция $\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ мажорирует семейство $\{f_y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, y \in A\}$, если существует такое x_0 , что $|f_y(x)| \leq \mathcal{F}(x) \forall x > x_0, y \in A$.

Теорема 3 Пусть \mathcal{F} мажорирует семейство $\{f_y \in C(\mathbb{R}^+) | y \in [a, b], \text{ и интеграл } \int_0^\infty \mathcal{F}(x) dx \text{ сходится. Тогда возможно интегрирование под знаком интеграла. А именно, пусть}$

$$g(y) = \int_0^\infty f_y(x) dx, \quad f_y(x) = f(x, y) \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f_y(x), \tag{6}$$

$$G'(y) = g(y), \quad G(0) = \int_0^\infty F(x, 0) dx. \tag{7}$$

Тогда

$$(8) \quad G(y) = \int_0^\infty F(x, y) dx \tag{8}$$

Доказательство Пусть для простоты $a = 0$, $b > 0$. Интегралы в правой части (5) сходятся по признаку сравнения. Рассмотрим

$$g_N(y) = \int_0^N f(x, y) dx$$

$$G'_N(y) = g_N(y), \quad G_N(0) = \int_0^N F(x, 0) dx.$$

По теореме 1,

$$G_N(y) = \int_0^N F(x, y) dx$$

Далее, выберем N так, что

$$\int_N^\infty \mathcal{F}(x) dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left| \int_N^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_0^y dt \int_N^\infty f(x, t) dx \right| < \varepsilon y$$

Значит,

$$|g_N(y) - g(y)| < \varepsilon y$$

$$|G_N(y) - G(y)| < \varepsilon y.$$

$$\int_0^y g_N(t) dt - G_N(y) = 0$$

по теореме 1. Следовательно,

$$\left| \int_0^y g(t) dt - G(y) \right| < 2\varepsilon y \forall \varepsilon.$$

Поэтому модуль в левой части равен нулю. □

6. Дифференцирование под знаком несобственного интеграла.

Теорема 4 Пусть \mathcal{F} мажорирует два семейства $\{f_y \in C(\mathbb{R}^+) | y \in [a, b]\}$ и $\{\frac{\partial f_y}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^+) | y \in [a, b]\}$, и интеграл $\int_0^\infty \mathcal{F}(x) dx$ сходится. Тогда возможно дифференцирование под знаком интеграла. А именно, пусть

$$G(y) = \int_0^\infty f_y(x) dx.$$

Тогда

$$G'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial f_y}{\partial y}(x) dx.$$

Эта теорема выводится из теоремы 3 точно так же, как теорема 1 из теоремы 2.

7. Решение линейных уравнений в виде интегралов, зависящих от параметра

Теорема 5 Пусть функция K дифференцируема по x, y , L_y – линейный дифференциальный оператор, например

$$L_y = A(y)D_y^2 + B(y)D_y + C(y) : g \mapsto Ag'' + Bg' + Cg;$$

K – дважды гладкая функция. Пусть $I(y) = \int_a^b K(x, y)dx$. Тогда

$$L_y I(y) = \int_a^b L_y K(x, y)dx.$$

На этом пути получают интегральные представления для решений уравнения $L_y f = 0$. А именно, пусть функция K такова, что удается найти функцию G и числа a и b так, что

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) \equiv L_y K(x, y)$$

и

$$G(a, y) \equiv G(b, y) \equiv 0.$$

Тогда функция

$$I(y) = \int_a^b K(x, y)dx$$

удовлетворяет уравнению $L_y I = 0$.