

Лекция 3. δ -образные последовательности и теоремы о приближении

1 δ -функция Дирака.

В 30-е годы прошлого века великий физик Поль Дирак ввел и использовал δ -функцию, обладающую следующими свойствами.

$$\begin{aligned}\delta(x) &= 0 \text{ при } x \neq 0 \\ &= \infty \text{ при } x = 0 \\ \int \delta(x) &= 1.\end{aligned}$$

Разумеется, такой функции не бывает. Тем не менее, для нее может быть “доказана”

Теорема 1 Для любой непрерывной функции $f \in C(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)dx = f(0)$.

Доказательство По теореме о среднем, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)dx = f(c) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = f(c)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$, $c \rightarrow 0$, а интеграл с одной стороны, не меняется, а с другой, стремится к $f(0)$. \square

2 δ -образная последовательность.

Формализацией понятия δ -функции служит δ -образная последовательность.

Определение 1 Последовательность (Δ_n) непрерывных или кусочно-непрерывных функций на прямой называется δ -образной последовательностью, если выполняются следующие требования:

$$a) \Delta_n \geq 0 \quad b) \int_{\mathbb{R}} \Delta_n \rightarrow 1 \quad c) \forall \varepsilon > 0 \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \Delta_n \rightarrow 0.$$

Когда область интегрирования не указана - это по умолчанию \mathbb{R} .

Теорема 2 Для любой финитной непрерывной функции f ,

$$\int f(x)\Delta_n(x)dx := (f, \Delta_n) \rightarrow f(0)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство $(f, \Delta_n) = I_n + J_n$, $I_n = \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} f(x)\Delta_n(x)dx$, $J_n = \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]} f(x)\Delta_n(x)dx$

$$I_n \leq |\text{supp } f| \cdot \max |f| \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \Delta_n(x)dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь $|\text{supp } f|$ – длина носителя f . По теореме о среднем, применимой, поскольку $\Delta_n \geq 0$,

$$J_n = f(c) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x) dx.$$

Значение $f(c)$ близко к $f(0)$ при малом ε , а значение $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x) dx$ близко к 1 при большом n . Следовательно, I_n мало, а J_n близко к $f(0)$. \square

3 Равномерность сходимости.

Следствие 1 Пусть $f \in C^0(\mathbb{R})$, Δ_n – δ -образная последовательность. Тогда $f_n(x) = \int f(x) \Delta_n(x - y) dx \rightarrow f(y)$.

Теорема 3 В условиях следствия, стремление $f_n \rightrightarrows f$ равномерно.

Доказательство Хотим доказать, что: $\forall \alpha > 0 \exists N$:

$$|f_n(y) - f(y)| < \alpha \quad \forall n > N. \quad (1)$$

Берем ε так, что $\text{osc}_{[y-\varepsilon, y+\varepsilon]} f < \frac{\alpha}{2} \quad \forall y$. Такое ε существует, поскольку f финитна. Берем N так, что $\int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \Delta_n(x) dx < \frac{\alpha}{2} \quad \forall n > N$. Такое N существует по с). Тогда (1) выполнено. \square

4 Важные δ -образные последовательности.

Пусть $\varphi \in C^{2,0}(\mathbb{R})$ – унимодулярная функция, $\varphi(0) = 1$. Унимодулярность значит, что $\text{sign } \varphi' = -\text{sign } x$. График функции φ напоминает колокол, φ имеет максимум в нуле.

Теорема 4 Положим:

$$\Delta_n = \frac{\varphi^n}{\int_{\mathbb{R}} \varphi^n(x) dx}. \quad (2)$$

Тогда Δ_n – δ -образная последовательность.

Доказательство Из унимодулярности φ следует неотрицательность:

$$\varphi \geq 0.$$

Кроме того, $\varphi(x) < 1 \quad \forall x \neq 0$.

Требование b определения 1 $\int_{\mathbb{R}} \Delta_n(x) dx \rightarrow 1$ выполнено по определению. Осталось проверить требование c .

Для любого ε

$$\max_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) = q(\varepsilon), \quad 0 < q(\varepsilon) < 1.$$

Положим: $I_n = \int \varphi^n(x) dx$. На множестве $|x| \geq \varepsilon$,

$$|\Delta_n(x)| \leq \frac{q^n(\varepsilon)}{I_n} := \lambda_n(\varepsilon). \quad (3)$$

Тогда

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \Delta_n(x) dx \leq \lambda_n(\varepsilon) |\text{supp } \varphi|.$$

Предложение 1 В условиях теоремы, $\lambda_n(\varepsilon) \rightarrow 0$ $\varepsilon > 0$.

Теорема 4 немедленно следует из предложения 1. □

Доказательство [предложения 1.] Фиксируем $\varepsilon > 0$. Числитель дроби стремится к нулю экспоненциально. Докажем, что знаменатель больше некоторой отрицательной степени n : существует такое c , что

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^n(x) dx \geq \frac{c}{\sqrt{n}}. \quad (4)$$

для всех достаточно больших n . Тогда дробь (3) стремится к нулю, потому что экспонента убывает быстрее любой степени.

Из унимодулярности функции φ следует, что для малых x : $|x| \leq x_0$, существует такое C , что

$$\varphi(x) \geq 1 - Cx^2.$$

Тогда при больших n , имеем: $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < x_0$,

$$\varphi(x) \geq 1 - \frac{C}{n}.$$

Следовательно, при $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$,

$$\varphi^n(x) \geq \left(1 - \frac{C}{n}\right)^n = i_n.$$

Имеем:

$$i_n \rightarrow e^{-C} \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Поэтому,

$$I_n \geq 2 \frac{i_n}{\sqrt{n}} > \frac{c}{\sqrt{n}}$$

при достаточно большом n , где

$$c = 3^{-C}.$$

Это доказывает предложение. □

5 Примеры.

Следующие две δ -образных последовательности используются при доказательстве теорем Вейерштрасса.

Возьмем

$$\varphi(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}. \quad (5)$$

Последовательность (2) с таким φ является δ -образной.

Эта последовательность важна потому, что на множестве $|x - y| < 1$, функция $\Delta_n(x - y)$ – многочлен по y .

Возьмем

$$\varphi(x) = (\cos x - 1)\chi_{[-\pi,\pi]}. \quad (6)$$

Последовательность (2) с таким φ тоже является δ -образной.

Каждая функция этой последовательности – тригонометрический многочлен по y при $|x - y| < \pi$.

6 Приближение многочленами.

Теорема 5 (Вейерштрасс) *Непрерывную функцию на отрезке можно равномерно приблизить многочленами.*

Доказательство Берем $\Delta_n(x) = P_n(x)\chi_{[-1,1]} \sim \delta$ -образную; $P_n(x)$ – многочлен. Эта последовательность дается формулами (2), (5). Тогда

$$\Delta_n(x - y) = P_n(x - y)\chi_{[-1+y,1+y]}$$

При фиксированном x , $P_n(x - y) = \sum_0^{2n} a_k(x)y^k$. QQQ tak? Далее, $\Delta_n(x - y) = \sum a_k(x)y^k$, если $|x - y| \leq 1$. Берем финитную функцию $f \in C^0$, $\text{supp } f \subset [0, 1]$ При $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ имеем: $|x - y| \leq 1$. Следовательно, при таких x и y , $\Delta_n(y - x) = \sum_0^{2n} a_k(x)y^k$. Далее, для любого y ,

$$f_n(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\Delta_n(x - y)dx = \int_0^1 f(x)\sum_0^{2n} a_k(x)y^k dx = \sum_0^{2n} b_k Y^k, \quad b_k = \int_0^1 f(x)a_k(x)dx.$$

По теореме 3, $f_n(y) \rightrightarrows f$ на \mathbb{R} . Но на отрезке $[0, 1]$ функции f_n – многочлены. \square

Теорема 6 *Тот же результат, но “многочлены” \rightsquigarrow “тригонометрические многочлены”.*

Доказательство Доказательство аналогично, только $\Delta_n(x) = \frac{(1 + \cos x)^n}{I_n}$, где $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x)^n dx$. В предыдущем доказательстве $[-1, 1]$ заменяется на $[-\pi, \pi]$, а $[0, 1]$ на $[0, \pi]$. \square