Лекция 2. До каких пор можно обобщать теорему Пифагора?

1. От Пифагора до Планшереля. Различные формулировки теоремы Пифагора:

a) на плоскости: $a^2 + b^2 = c^2$;
b) в евклидовом пространстве: $|\xi|^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$
c) для рядов Фурье: $f \in C[-\pi, \pi]$ или $(L_2[-\pi, \pi])$ $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$

$$(1) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = 2\pi\Sigma|c_k|^2;$$

d) для преобразований Фурье: $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\alpha x}dx$

$$(2) \qquad ||\hat{f}|| = ||f||$$

Формулы (1) и (2) $\sim$ называются равенствами Планшереля.

2. Теорема Рисса в вещественном гильбертовом пространстве.

Определение 1 *Система (e_n) полна в H, если ее линейные комбинации плотны в H.*

Теорема 1 *Пусть H – гильбертово пространство, $e_1, \dots, e_n, \dots$ – ортонормированный базис в H; система (e_n) полна. Тогда любой элемент $x \in H$ разлагается в ряд $x = \Sigma c_k e_k$, где $c_k = (x, e_k)$.*

Доказательство Для любого n справедливо соотношение: $r_n = x - \Sigma_1^n c_k e_k \perp e_k$ при $k = 1, \dots, n$. Отсюда следует: $||x||^2 = ||r_n||^2 + \Sigma c_k^2 \Rightarrow \Sigma c_k^2 \leq ||x||^2$ – неравенство Парсеваля.

Пространство H полно. Последовательность

$$x_n = \Sigma_1^n c_k e_k$$

фундаментальна. Следовательно, она сходится. Пусть $y = \lim x_n$.

Утверждение 1 *$y = x$.*

Пусть нет. Тогда $z = x - y \neq 0$, $z \perp e_k \forall k$. Но линейные комбинации e_k плотны в H. Приблизим z последовательностью таких комбинаций:

$$w_n = \Sigma_1^n a_{k,n} e_k \to z;$$

суммирование ведется по k, и (конечное) число слагаемых зависит от n. Тогда

$$0 = (z, \Sigma a_{k,n} e_k) = (z, w_n) \to (z, z).$$

Следовательно, $z = 0$. Итак,

$$x = y = \Sigma c_k e_k.$$

$\square$

Следствие 1 $||x||^2 = \Sigma c_k^2$ – *формула Планшереля*

3. Самый знаменитый ортогональный базис на $[-\pi, \pi]$:

$$(SC) \qquad\qquad 1; \cos nx; \sin nx$$

Попарная ортогональность: будет проверена потом. Полнота следует из теоремы Вейерштрасса:

Теорема 2 *Любая непрерывная периодическая функция на* $[-\pi, \pi]$ *может быть (равномерно) приближена тригонометрическими многочленами.*

Непрерывные периодические функции плотны в L_2. Следовательно, система S полна в L_2.

4. Разложение по ортогональной ненормированной системе: (e_k) **попарно ортогональны, но** $(e_k, e_k) \neq 1$.

$$f = \Sigma c_k e_k,\ (x, e_k) = c_k(e_k, e_k) \Rightarrow c_k = \frac{1}{(e_k, e_k)}(x, e_k).$$

Приложение к разложению по системе CS:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi,$$

поскольку $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно,

$$f(x) = a_0 + \Sigma_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx + a_k \cos kx$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cos kx dx,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int f(x)\sin kx dx.$$

5. Еще более знаменитый базис в $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$**.**

Положим для краткости: $[\pi, \pi] = \sigma$ и рассмотрим пространство $L_2(\sigma, \mathbb{C})$, которое является пополнением пространства непрерывных функций $f : \sigma \to \mathbb{C}$ по норме, заданной скалярным произведением

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx. \tag{1}$$

Базис $E : e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}$.

Ортогональность:

$$I = \left\langle e^{inx}, e^{imx} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 2\pi, \ n = m \\ 0, \ n \neq m \end{cases}$$

Проверка:

$$n \neq m : I = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Следовательно,

$$f(x) = c_k e^{ikx}, \ c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \tag{2}$$

Ортогональность базиса SC следует из ортогональности базиса E и формулы Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Следовательно,

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

Полнота системы E следует из полноты системы CS и формулы Эйлера.

6. Гладкость функций и убывание коэффициентов Фурье.

Теорема 3 *Пусть функция* $f \in C^m(S^1), c_k$ *– ее коэффициенты Фурье. Тогда* $|c_k| < C|k|^{-m}$.

Доказательство Индукция по m.

База индукции: $m = 0$. Пусть $f \in C(S^1)$. Тогда $|f| < C$,

$$c_k = \int_{S^1} f(x) e^{-ikx} dx, \ |c_k| < 2\pi C.$$

Шаг индукции: переход от m к $m+1$. Пусть $f' \in C^m(S^1), \ d_k, k \in \mathbb{Z}$ – коэффициенты Фурье функции f'. Тогда, по предположению индукции, $|d_k| < C|k|^{-m}$. Далее, в силу (2),

$$2\pi d_k = \int_{S^1} f'(x) e^{-ikx} dx = \int_{S^1} e^{-ikx} df(x) = -ik \int_{S^1} f(x) e^{-ikx} dx = -ik \cdot 2\pi c_k$$

Следовательно,

$$|c_k| \leq \frac{|d_k|}{|k|} \leq \frac{C'}{|k|^{m+1}}.$$

□

Следствие 2 *Ряд Фурье дважды гладкой функции сходится к ней равномерною*

7. Пространство $L_2(\mathbb{R})$

Определение 2 *Пространство* $L_2(\mathbb{R})$ *– это пополнение пространства* $C_0(\mathbb{R})$ *финитных непрерывных функций по* L_2*-норме.*

Определение 3 *Непрерывная функция* f *на прямой принадлежит* $L_2(\mathbb{R})$*, если ее* L_2*-норма конечна (соответствующий интеграл сходится).*

Предложение 1 *Если непрерывная функция* f *на прямой принадлежит* $L_2(\mathbb{R})$*, то она является пределом последовательности непрерывных финитных функций, сходящихся к ней по* L_2*-норме.*

Задача Докажите!