Лекция 19. Теорема Радона-Никодима.

1. Определение заряда.

Определение 1 *(наивное). Заряд – это мера, котрая может принимать отрицательные значения.*

Примеры 1 1. $\delta(0) - \delta(1)$.
2. $\int f(x) d\mu_x, \ f : E \to \mathbb{R}$.

Определение 2 *(формальное). Заряд – это произвольная конечная σ-аддитивная функция множества, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств E, называемых измеримыми.*

2. Разложение Хана.

Определение 3 *Пусть Φ – заряд, заданный на σ-алгебре множеств $\mathcal{M}$, называемых измеримыми. Множество $X \in \mathcal{M}$ называется положительным (отрицательным) для Φ, если для любого подмножества $Y \subset X, \ Y \in \mathcal{M}, \ \Phi(Y) \geq 0$ (соответственно, $\Phi(Y) \leq 0$).*

Лемма 1 *Пусть Φ – заряд, не являющийся мерой. Тогда для него существует отрицательное множество.*

Доказательство Поскольку Φ – не мера, существует множество X такое, что $\Phi(X) < 0$.

Пусть любое подмножество $Y \subset X$ имеет неположительный заряд Φ. Тогда множество X – отрицательное, то есть искомое.

Пусть существует $Y \subset X : \Phi(Y) \geq 0$. Введем частичное упорядочение в множестве таких подмножеств $Y \subset X$: дизъюнктное объединение двух подмножеств больше каждого из своих слагаемых. Возьмем измеримое множество $Z \subset X : \Phi(Z) \geq 0$, которое является максимальным элементом в этом множестве подмножеств. Оно существует и не совпадает с X. Множество $X \setminus Z$ отрицательно: если нет, то Z не максимально. $\square$

Следствие 1 *В условиях леммы 1 каждое множество, заряд которого отрицателен, содержит отрицательное подмножество.*

Теорема 1 *Для каждого конечного заряда Φ существует разложение*

$$E = X^+ \sqcup X^-,$$

где $X^+(X^-)$ – положительное (отрицательное) множество относительно Φ.

Доказательство Объединение любого множества отрицательных множеств Φ – снова отрицательное множество для Φ. Возьмем в качестве X^- максимальное отрицательное множество для Φ (объединение всех отрицательных). Положим: $X^+ = E \setminus X^-$. Множество X^+ – положительное. Действительно, пусть $Y \subset X^+ : \Phi(Y) < 0$. В силу следствия, Y содержит отрицательное множество. Следовательно, X^- не максимально. Противоречие. $\square$.

Разложение теоремы 1 называется разложением Хана.

3. Разложение Жордана.

Теорема 2 *Каждый заряд является разностью двух взаимно ортогональных мер:*

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-, \ \Phi^\pm = \Phi|_{X^\pm}, \ \Phi^+(Y) = \Phi(Y \cap X^+), \ \Phi^-(Y) = -\Phi^-(Y \cap X^-)$$

Замечание 1

$$\Phi^\pm(X^\pm) = \Phi^\pm(E)$$

$$\Phi^\pm(X^\pm) = 0(\textit{взаимная ортогональность}).$$

Доказательство Следует из теоремы 1. $\square$

4. Теорема Радона-Никодима.

Определение 4 *Заряд Φ абсолютно непрерывен по мере μ, если $\mu(X) = 0 \Rightarrow \Phi(X) = 0$.*

Теорема 3 *Пусть Φ – конечный заряд, абсолютно непрерывный относительно меры μ; алгебра $\mathcal{M}$ измеримых множеств для Φ и μ – общая. Тогда существует μ-суммируемая функция f такая, что $\forall X \in \mathcal{M}$,*

$$\Phi(X) = \int_X f d\mu. \tag{1}$$

Определение 5 *Функция f называется плотностью заряда Φ по мере μ или производной*

$$f = \frac{d\Phi}{d\mu}.$$

5. Охота за плотностью.

Доказательство

Эвристическое соображение. Пусть формула (1) верна. Рассмотрим заряд

$$\Phi_\nu = \Phi - \nu\mu$$

и возьмем соответствующее разложение Хана:

$$E = X_\nu^+ \sqcup X_\nu^- .$$

Тогда

$$f \le \nu \text{ на } X_\nu^- . \tag{2}$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3. Рассмотрим заряд

$$\Phi_\nu = \Phi - \nu\mu$$

и возьмем соответствующее разложение Хана:

$$E = X_\nu^+ \sqcup X_\nu^- .$$

Получим возрастающее по вложению семейство множеств X_ν^-, $\nu \in \mathbb{R}$. Пусть $X^- = \cup X_\nu^-$. Наша ближайшая задача - найти функцию $f : X^- \to \mathbb{R}$ так, что выполнено соотношение (2).

6. Поимка плотности.

Лемма 2 *Для любого возрастающего семейства множеств* X_ν^-, $\nu \in \mathbb{R}$ *существует функция* $f : X^- = \cup X_\nu^- \to \mathbb{R}$ *такая что выполнено соотношение* (2).

Доказательство Искомая функция строится как предел простых.

Фиксируем q и рассмотрим последовательность $\frac{k}{q}$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим:

$$f_q = \frac{k}{q} \text{ на } X^-_{\frac{k+1}{q}} \setminus X^-_{\frac{k}{q}}$$

Положим:

$$q = 2^k, \; g_k = f_{2^k}.$$

Тогда $g_k \nearrow \infty$ и образует фундаментальную последовательность в метрике C. Пусть

$$f = \lim g_k$$

Функция f является искомой. $\square$

7. Опознание плотности.

Для каждого подмножества $Y \subset X_\nu^-$ справедливо неравенство:

$$\Phi(Y) < \nu\mu(Y).$$

Это следует из определения X_ν^-. Поэтому

$$\int_Y g_k d\mu \leq \Phi(Y) \leq \int_Y g_k + \frac{1}{q} d\mu,\ q = 2^k.$$

Переходя к пределу по k, получим (1).

8. Окончание доказательства

Создается впечатление, что теорема Радона-Никодима доказана. Однако мы нигде не использовали абсолютной непрерывности заряда Φ. Значит, теорема доказана быть не может. И действительно, равенство (1) доказано при условии $Y \subset X_\nu^-$. Осталось рассмотреть дополнение $N = E \setminus X^-$.

Лемма 3 *Пусть Φ – конечный заряд, и Φ_ν, X^- – те же, что и выше, $N = E \setminus X^-$. Тогда $\mu(N) = 0$.*

Доказательство Напомним, что $X_\nu^- \nearrow$ при $\nu \nearrow \infty$. Пусть $\mu(N) > 0$. Тогда

$$\Phi_\nu(N) \geq 0\ \forall\ \nu > 0.$$

Следовательно,

$$\nu\mu(N) \leq \Phi(N) = \infty,$$

противоречие. □

В этот момент в игру вступает абсолютная непрерывность Φ относительно μ, которая влечет:

$$\Phi(N) = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что для любого $X \subset E$

$$\Phi(X) = \int_X f d\mu = \int_{X \cap X^-} f d\mu.$$

Это доказывает теорему Радона - Никодима. □

9. Теорема о разложении меры

В качестве бесплатного приложения получается следующая теорема о разложении меры:

Теорема 4 *Каждая конечная мера λ, заданная на единичном кубе с мерой Лебега μ на нем разлагается в сумму трех мер: абсолютно непрерывной и сингулярной относительно μ, а также дискретной:*

$$\lambda = \alpha + \sigma + \delta.$$

Доказательство [набросок]. По мере λ строим множество X^- и плотность f на нем, как это сделано выше. Мера λ подмножеств множества X^- выражается той же формулой, что и в теореме Радона-Никодима.

Пусть множество N - то же, что в доказательстве теоремы Радона-Никодима. По-прежнему $\mu(N) = 0$. Но теперь $\lambda(N) \neq 0$. Рассмотрим множество всех точек (атомов), мера λ которых положительна. Ограничение меры λ на это множество - дискретная мера. Обозначим ее δ. Ограничение меры $\sigma = \lambda - \delta$ на N - сингулярная мера. Окончательно, $\lambda = \alpha + \sigma + \delta$. Это доказывает теорему о разложении меры. $\square$