Лекция 18. Теорема Фубини

1. Теорема Фубини для ограниченных множеств.

$E = E_1 \times E_2,\ \mu = \mu_1 \times \mu_2,\ X \subset E\ X_x = X \cap \{x\} \times E_2,\ \mu_j(E_j) = 1.$

Теорема 1 *Пусть X и X_x – те же, что и выше. Тогда*

$$\mu(X) = \int \mu_2(X_x) d\mu_{1x} \tag{1}$$

Доказательство **Шаг** 1. Пусть X – элементарное множество. Тогда X – дизъюнктное объединение "прямоугольников". Для каждого из них формула (1) следует из определения площади прямоугольника как "произведения основания на высоту".

Шаг 2. Пусть X – счетное объединение элементарных множеств. Его можно считать дизъюнктным. Формула (1) для X получается из предыдущего утверждения предельным переходом.

Шаг 3. Фиксируем ε и приблизим X элементарным множеством A с точностью до ε^2:

$$\mu^*(X \bigtriangleup A) < \varepsilon^2.$$

Пусть $A_x = A \cap \{x\} \times E_2$. Формула (1) верна для A, подставленного вместо X.

Докажем, что "для большинства x множество A_x хорошо приближает X_x". Для этого рассмотрим множество $U \supset (X \bigtriangleup A)$, являющееся счетным объединением элементарных:

$$\mu(U) < \varepsilon^2.$$

Для него справедлива формула (1):

$$\mu(U) = \int \mu_2(U_x) d\mu_{1x}.$$

По неравенству Чебышева,

$$\mu_1\{x | \mu_2(U) < \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Следовательно, для ε – почти всех x, множество A_x приближает множество X_x с точностью до ε. (Будем говорить, что свойство выполняется ε-почти всюду, если оно выполняется на множестве, мера дополнения к которому меньше ε.)

Шаг 4.Рассмотрим теперь последовательность $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}, k \in \mathbb{N}$. Тогда для ε – почти всех x, множество X_x приближается элементарным с точностью до ε_k при любом k, то есть измеримо. Пусть $Y^\varepsilon \subset E_1$ – множество тех x, для которых множество A_x приближает множество X_x с точностью до ε. Мы доказали, что

$$\mu(CY^\varepsilon) < \varepsilon.$$

Положим:

$$X^\varepsilon = X \cap (Y^\varepsilon \times E_2).$$

Имеем:

$$|\mu(X^\varepsilon) - \mu(A^\varepsilon)| < \mu^*(X^\varepsilon \triangle A^\varepsilon) < \mu^*(X \triangle A) < \varepsilon^2.$$

С другой стороны,

$$\mu(A^\varepsilon) = \int \mu_2(A^\varepsilon_x) d\mu_1(x), \ |\mu_2(A^\varepsilon_x) - \mu_2(X_x)| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|\mu(A^\varepsilon) - \int \mu_2(X_\varepsilon) d\mu_1(x)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|\mu(X) - \int_{Y^\varepsilon} \mu_2(X_\varepsilon) d\mu_1(x)| < 2\varepsilon$$

$$|\mu(X) - \int_{E_1} \mu_2(X_\varepsilon) d\mu_1(x)| < 3\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, это доказывает (1). □

2. Теорема фубини для неограниченных множеств.

Теорема 2 *Пусть $E_2 = \sqcup F_n$, $\mu_2(F_n) = 1$, и пусть $X \subset E_1 \times E_2$ имеет конечную меру. Тогда справедлива теорема 1.*

Доказательство Заменим E_2 на $\sqcup_1^N F_n$, воспользуемся предыдущей теоремой и перейдем к пределу. □

Следствие 1 *Интеграл неотрицательной функции $\equiv$ мера подграфика.*

3. Теорема Фубини для функций.

Теорема 3 *Пусть $W \subset E_1 \times E_2$, $f : W \to \mathbb{R}$ – измеримая суммируемая функция. Тогда*

$$\int_W f = \int \left(\int_{W_x} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x). \tag{2}$$

Доказательство Можно считать функцию f неотрицательной. Применим теорему Фубини для множеств к подграфику,

$$X = \{(x, y, t) \in U | \tilde{\in} [0, f(x, y)]\},\ U = E_1 \times E_2 \times \mathbb{R}.$$

Пусть $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times l$, где l - мера Лебега на прямой. Докажем, что обе части формулы (2) равны $\mu(X)$.

Воспользуемся разбиением

$$U = (E_1 \times E_2) \times \mathbb{R}$$

и применим к X теорему Фубини для множеств. Получим, что

$$\mu(X) = \int_W f,$$

(еще раз доказано следствие 1).

Воспользуемся разбиением

$$U = E_1 \times (E_2 \times \mathbb{R}).$$

и снова применим к X теорему Фубини для множеств. Получим, что

$$\mu(X) = \int \left(\int_{W_x} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

□