Лекция 17. Общая теория меры.

1. **Общая теорема о продолжении меры.**

Рассмотрим произвольное пространство E. Рассмотрим класс $\mathcal{E}$ подмножеств множества E, называемых элементарными. Пусть этот класс – конечная σ-алгебра, содержащая E, называемая также кольцом с единицей. Пусть на $\mathcal{E}$ определена мера m, обладающая следующими свойствами:

$$m(\sqcup_1^N A_n) = \Sigma m(A_n), \tag{1}$$

$$m(A \subset \cup A_n) \leq \Sigma m(A_n). \tag{2}$$

Свойство(2) называется полуаддитивностью.

Определение 1 *Внешняя мера $\mu_*(X)$ определяется так:*

$$\mu^*(X) = \inf_{\cup A_n \supset X, A_n \in \varepsilon} \Sigma m(A_n).$$

Определение 2 *Множество измеримо, если $\forall \varepsilon \exists A \in \varepsilon : \mu^*(X \triangle A) < \varepsilon$. Положим:*

$$\mu(X) = \mu^*(X) \tag{3}$$

Теорема 1 *(о продолжении меры) Пусть ε –конечная σ-алгебра и m – мера на ней, обладающая свойствами* (1) *и* (2). *Тогда определение 2 задает σ-аддитивную меру на множестве всех измеримых множеств.*

Эта теорема доказана на лекциях 11 и 12, 1 и 8 апреля, и сформулирована на лекции 12.

Вывод: для того, чтобы задать новую меру, достаточно задать полуаддитивную меру на кольце с единицей.

2. Мера Стильтьеса.

Пусть f – монотонно возрастающая функция. Рассмотрим тот же класс $\mathcal{E}$ элементарных множеств на отрезке $[0, 1]$, что и в начале теории меры Лебега, и положим:

$$m(a, b) = m(a, b] = m[a, b) = m[a, b] = f(b) - f(a). \tag{4}$$

Пусть f монотонно возрастает и кусочно непрерывна. В точках непрерывности функции f действуют равенства (4) Если a и/или b – точки разрыва, положим:

$$m(a, b) = f(b - 0) - f(a + 0)$$

$$m[a, b] = f(b + 0) - f(a - 0)$$

$$m(a,b] = f(b+0) - f(a+0)$$
$$m[a,b) = f(b-0) - f(a-0)$$

(точка включается $\Leftrightarrow$ скачок включается)

3. Примеры.

A. $f = \chi_{(0,1]},\ m(0) = 1,\ m_{(0,1]} = 0\ \mu = \delta(0)$.

Мера Стильтьеса определяется с помощью теоремы о продолжении меры. Интеграл Лебега по любой мере определяется так же, как и по мере Лебега. Интеграл Лебега по мере Стильтьеса называется интегралом Лебега - Стильтьеса.

Пусть f – непрерывная функция. Тогда

$$\int_0^1 f d\delta(0) = f(0).$$

B. Пусть f – функция Кантора.

Определение 3 *Носитель меры – это минимальное замкнутое множество, дополнение к которому имеет меру* 0.

Носитель меры Стильтьеса, соответствующей функции Кантора – это канторово совершенное множество.

C. Пусть $f \in C^1(E),\ f' \geq 0$. Тогда

$$\mu(X) = \int_X f'(x)dx.$$

4**. Мера на квадрате** $K = E_1 \times E_2,\ E_1 = E_2 = [0,1]$**.**

Элементарные множества – прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям, с естественной мерой и их конечные объединения с мерой, определенной по формуле (1). Чтобы воспользоваться предыдущей теоремой, нужно доказать полуаддитивность этой меры. Это – общий факт, изложенный ниже.

5**. Прямое произведение мер.**

Пусть $E_j,\ j = 1,2$ – “объемлющее” пространство, $\mathcal{E}_j$ – совокупность элементарных подмножеств $E_j,\ m_j : \mathcal{E}_j \to \mathbb{R}^+$ – полуаддитивная мера на $\mathcal{E}_j$. Положим:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 = \{A \times B | A \in \mathcal{E}_1,\ B \in \mathcal{E}_2\};\ m(A \times B) = m_1(A_1) \times m_2(B). \quad (5)$$

$\mathcal{E}$ – множество конечных объединений множеств из $\mathcal{E}_0$; m определено на $\mathcal{E}$ с помощью (5).

Теорема 2 *Так определенная мера полуаддитивна.*

6. Теорема Фубини для множеств.

Теорема 3 *Пусть E – единичный отрезок. Пусть X – подмножество единичного квадрата, μ_k – k-мерная мера Лебега. Тогда для почти всех $x \in E$ множество*

$$X_x = X \cap (\{x\} \times E)$$

измеримо, и

$$\mu_2(X) = \int \mu_1(X_x) d\mu_1(x).$$

Доказательство будет дано в следующей лекции.