Лекция 16. Пространство L_1.

Для удобства студентов на сайте будет размещено два доказательства полноты пространства L_1.

1. Определение пространства L_1.

Пусть D — множество с мерой. Будем говорить, что измеримые функции на D эквивалентны, если они равны почти всюду. Определим $L_1(D)$ как множество классов эквивалентности интегрируемых по Лебегу функций на D.

Предложение 1 *Множество $L_1(D)$ является векторным пространством, а $||f|| = \int_D |f| d\mu$ задаёт норму на этом пространстве.*

Наша задача — доказать полноту этого пространства.

Теорема 1 *Пространство $L_1(D)$ полно.*

Ниже предложены два доказательства, они основаны на неравенстве Чебышёва, которое можно выразить словами: *в комнату площади 10 м^2 нельзя поставить прямоугольный стол площадью больше 10 м^2.*

Предложение 2 *(Неравенство Чебышёва) Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ измерима, $f \geq 0$ на $X \subset E$. Тогда $\forall c > 0$*

$$\mu\{x \in X | f(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_X f(x) d\mu.$$

Доказательство Пусть $E = \{x \in X | f(x) \geq c\} \subset X$. Тогда на X имеем $f \geq c\chi(E)$ и $\int_X f(x) d\mu \geq c \int_X \chi(E) d\mu = c\mu(E)$. $\square$

2. Первое доказательство.

Будем предполагать, что D может быть представлено объединением счётного числа множеств конечной меры (например, $D \subset \mathbb{R}$).

Лемма 1 *Пусть f_n — последовательность функций из $L_1(D)$, монотонно возрастающая по n в каждой точке. Предположим, что f_n сходится поточечно к функции $f \in L_1(D)$. Тогда f интегрируема по Лебегу и f_n сходится к f и в $L_1(D)$.*

Доказательство Рассмотрим последовательность функций $g_n = |f - f_n|$. Эти функции положительны, монотонно убывают по n и поточечно стремятся к нулю. Нам достаточно доказать, что $\int_D g_n d\mu$ стремится к нулю.

Воспользуемся тем, что для измеримой $g \geq 0$ интеграл Лебега $\int_D f d\mu$ вычисляет меру Лебега множества $D_g = \{(x, y) \,|\, x \in D,\, 0 \leq y \leq g(x)\}$. Заметим, что так как $g_n \to 0$, $\cap_n D_{g_n}$ состоит только из точек с $y = 0$, в частности, имеет меру 0.

Пусть $E_n = D_{g_n} \setminus D_{g_{n+1}}$. Тогда в силу монотонности g_n множества E_n не пересекаются и $D_{g_n} = \cup_{m \geq n} E_n$. Значит, в силу σ-аддитивности меры Лебега, $\mu(E_n)$ образуют сходящийся ряд, и $\int_D g_n d\mu$ совпадает со стремящимся нулю остаточным членом этого ряда. $\square$

Лемма 2 *Пусть f_n — последовательность функций из $L_1(D)$, возрастающая по n в каждой точке, при этом $\int_d f_n$ ограничен. Тогда $\sup_n f_n$ определён почти всюду, и эта функция, доопределённая нулём, принадлежит $L_1(D)$.*

Доказательство Вычитая из всех функций f_1, сведём утверждение к случаю неотрицательных функций.

Пусть для всех n $\int_D f_n d\mu < I$. Тогда по неравенству Чебышёва мера множества точек $E(n, C) = \{x \mid f_n(x) > C\}$ не превышает I/C. Множество

$$E(C) = \{x \mid \sup_n(f_n) > C \text{ или бесконечен}\}$$

является объединением этих множеств. В силу возрастания последовательности f_n имеем $E(n+1, C) \supset E(n, C)$, поэтому $E(C)$ совпадает с объединением непересекающихся множеств $E(n+1, C) \setminus E(n, C)$, меры которых образуют ряд, частичные суммы которого меньше I/C. Тогда и мера $E(C)$ не превосходит I/C.

Функция $\sup_n f_n$ определена всюду, кроме $\cap_N E(N)$, но поскольку мера $E(N)$ стремится к нулю с ростом N, мера пересечения равна нулю.

Пусть $f = \sup_n f_n$. Для доказательства интегрируемости снова воспользуемся тем, что для измеримой $f \geq 0$ интеграл Лебега $\int_D f d\mu$ вычисляет меру Лебега множества $D_f = \{(x, y) \mid x \in D,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Заметим, что $D_f = \cup_n D_{f_n}$ и аналогично положим $E_n = D_{f_n} \setminus D_{f_{n-1}}$. Тогда $D_{f_n} = \cup_1^n E_i$, $D_f = \cup_1^\infty E_i$, поэтому ряд из мер D_i имеет ограниченные частичные суммы, значит, он сходится, и предел равен мере D_f, то есть, искомому интегралу. $\square$

Лемма 3 *Пусть f_n — последовательность произвольных функций из $L_1(D)$, положим $a_i = ||f_{n+1} - f_n||$. Предположим, что ряд $\sum a_i$ сходится. Тогда $g = \inf_n f_n$ определена почти всюду, принадлежит $L_1(D)$ и $||g - f_1|| \leq \sum a_i$.*

Доказательство Пусть $g_n = \min(f_1, \ldots, f_n)$. Пусть $D_i \subset D$ — подмножество, где минимальной является функция f_i. Тогда

$$\int_D |g_n - f_1| d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} |g_n - f_1| d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} |f_i - f_1| d\mu \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{D_i} \sum_{j=1}^{i-1} |f_{j+1} - f_j| d\mu \leq \int_D \sum_{j=1}^{n-1} |f_{j+1} - f_j| d\mu = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j,$$

то есть $||f_1 - g_n|| \leq \sum \alpha_i$ для всех n.

Заметим, что последовательность $f_1 - g_n$ монотонно возрастает, $f_1 - g = \sup_n(f_1 - g_n)$. В силу ограниченности интегралов по Лемме 2 функция $f_1 - g$ принадлежит $L_1(D)$, следовательно, $g \in L_1(D)$. А по Лемме 1 $||g - f_1||$ является пределом $||g_n - f_1||$ и, тем самым, не превышает $\sum \alpha_i$. □

Доказательство Теоремы. Пусть теперь f_n — фундаментальная последовательность в $L_1(D)$. Выберем подпоследовательность f_{i_j} для которой $||f_{i_j} - f_{i_{j+1}}|| < 2^{-j}$ и положим $g_k = \inf_{j \geq k} f_{i_j}$. Тогда по лемме 3 $||f_{i_j} - g_j|| < 2^{-j+1}$, то есть последовательность g_j фундаментальна и эквивалентна исходной. С другой стороны, по построению g_k возрастает и $||g_j||$ ограничена в силу фундаментальности последовательности. Тогда по лемме 2 с учётом леммы 1 она сходится к $\sup_k g_k \in L_1(D)$, и туда же сойдётся эквивалентная ей исходная последовательность f_n.

3. Второе доказательство.

Лемма 4 *(Основная лемма) Рассмотрим фундаментальную последовательность (f_n) в L_1. Тогда для любого ε из нее можно выбрать подпоследовательность $g_k = f_{n_k}$ так, что $g_k \xrightarrow{п.в.} G_\varepsilon$ вне множества меры меньше ε.*

Доказательство . Из последовательности (f_n) выбираем последовательность g_k так, что

$$\int |g_k - g_{k+1}| d\mu < \frac{\varepsilon}{4^k}, \ k \geq 1$$

Пусть

$$E_k = \{x | |g_k - g_{k+1}| > \frac{1}{2^k}\}.$$

По неравенству Чебышева,

$$\mu(E_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Тогда

$$\mu(\cup E_k) \leq \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\sum (g_k - g_{k+1}) \rightrightarrows G_\varepsilon \text{ на } C(\cup E_k).$$

□

Редукция: основная лемма ⇒ полнота L_1.

Выбираем последовательность $\varepsilon_m \to 0$. Строим индукцией по m последовательность $g_{mk} \to G_m$ при $k \to \infty$. На шаге индукции используется основная лемма. Правильно выбранная диагональная последовательность (обозначим ее снова g_k) сходится почти всюду к некоторой функции g.

Докажем, что $g \in L_1$. Выше фактически доказано, что существует предел:

$$\sum |g_k - g_{k+1}| \xrightarrow{\text{п.в.}} G$$

Докажем, что $G \in L_1$. Отсюда следует, что $g \in L_1$.

Пусть это не так: $\int G = \infty$. Поскольку $\exists K$: при $k \geq K$

$$||g_k - g_{k+1}|| \leq \frac{\varepsilon}{2^k},$$

получаем, что все интегралы частных сумм ряда для G ограничены в совокупности:

$$G_M := \sum_1^M ||g_k - g_{k+1}|| \leq C.$$

Если $\int G = \infty$, то существует N-срезка $G^{(N)}$, для которой $\int G^{(N)} > C + 1$.

Поскольку $G_M \xrightarrow{\text{п.в.}} G$, то же верно для N-срезок:

$$G_M^{(N)} \xrightarrow{\text{п.в.}} G^{(N)}.$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int G_M^{(N)} \to G^{(N)}.$$

Но $\int G_M^{(N)} < C$, $\int G^{(N)} > C + 1$, противоречие.

Итак, $G \in L_1$. Кроме того, $G_M \leq G$ и $G_M \xrightarrow{\text{п.в.}} G$. Следовательно,

$$|G - G_M| \leq G,$$

и $G - G_M \to 0$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\int G - G_M \to 0.$$