Лекция 15. Интеграл Лебега и его свойства.

1. Напоминание.

Простые функции. Интеграл Лебега.

2. Интегрируемость.

Теорема 1 *Всякая ограниченная измеримая функция интегрируема.*

Доказательство

Лемма 1 *Всякая ограниченная измеримая функция является равномерным пределом простых.*

Доказательство Разобьем $[-N, N] \supset f(E)$ на равные полуинтервалы длины ε Занумеруем их: $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Пусть $\sigma_k = [a_k, b_k),\ E_k = f^{-1}(\sigma_k)$. Тогда E_k измеримо. Положим:

$$f_\varepsilon - \Sigma a_k E_k.$$

Тогда

$$|f - f_\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$f_{\frac{\varepsilon}{k}} \rightrightarrows f.$$

$\square$

Лемма 2 *Последовательность $f_{\frac{\varepsilon}{k}}$ фундаментальна в метрике C.*

Доказательство В силу неравенства треугольника,

$$||f_{\frac{\varepsilon}{k}} - f_{\frac{\varepsilon}{m}}||_C \leq \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{m}.$$

$\square$

Лемма 3 *Модуль интеграла от простой функции по единичному отрезку не больше ее модуля.*

Следствие 1 *Последовательность интегралов фундаментальна, следовательно, сходится.*

Лемма 4 *Интеграл измеримой функции не зависит от последовательности простых функций, которые ее равномерно приближают.*

Доказательство $f_n \rightrightarrows f,\ g_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n - g_n \rightrightarrows 0 \Rightarrow \int(f_n - g_n) \to 0.$ □

□

3. Элементарные свойства интеграла.

Теорема 2 *(линейность)* $\int_E(\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$

Доказательство Следует из линейности интеграла от простых функций, которая очевидна. □

Теорема 3 *(аддитивность)* $\int_a^b f d\mu + \int_b^c f d\mu = \int_a^c f d\mu.$

Доказательство Следует из аддитивности интеграла от простых функций, которая очевидна. □

4. Абсолютная непрерывность.

Для любого измеримого множества $X \subset E,\ \int_X f d\mu := \int_E f \chi_X d\mu.$

Теорема 4 *Пусть f – ограниченная измеримая функция. Тогда для любого ε существует δтакое, что:*

$$\mu(X \subset E) < \delta \Rightarrow \int_X f d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство Для любой простой функции g с носителем на X,

$$|\int_X g d\mu| \leq \mu(X) \cdot \max|g|.$$

□

5. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.

Определение 1 *Срезкой f_N неограниченной функции f называется*

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x),\ |f(x)| \leq N \\ N,\ f(x) \geq N \\ -N,\ f(x) \leq N \end{cases}$$

Определение 2 *Неотрицательная функция суммируема, если интегралы от ее срезок ограничены в совокупности.*

Определение 3 *Неограниченная функция суммируема, если ее модуль суммируем.*

Определение 4 *Интеграл суммируемой функции f определяется как предел:*

$$\int f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int f_N d\mu.$$

Задача 1 *Доказать теоремы $2, 3, 4$ для суммируемых функций.*

Задача 2 *Доказать, что предел в определении 4 можно брать по любой подпоследовательности $N_k \to \infty$, причем результат не зависит от выбора последовательности.*

Теорема 5 *Пусть последовательность суммируемых функций f_n сходится почти всюду к f, причем существует суммируемая функция g такая, что $|f_n| \le g \forall n$. Тогда функция f суммируема, и*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Доказательство Возьмем N так, что

$$\int |g - g_N| d\mu < \varepsilon.$$

Срезки $(f_n)_N \xrightarrow{\text{п.в.}} f_N$.

$$\int |f_n - (f_n)_N| d\mu < \varepsilon.$$

Пользуясь теоремой Егорова, возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$ так, что

$$(f_n)_N \rightrightarrows f_N$$

вне множества меры δ. Тогда для достаточно большого n,

$$\left| \int f_N d\mu - \int (f_n)_N d\mu \right| < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\int |f_N| d\mu < \int g d\mu \Rightarrow f$ суммируема. Далее,

$$\int |f - f_N| d\mu < \int |g - g_N| d\mu < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int f_n \to \int f.$$

□