Лекция 13. Измеримые функции и Канторова лестница

1. Принцип непрерывности.

Теорема 1 *Пусть X_n – последовательность вложенных измеримых подмножеств отрезка $[0,1]$, $X = \cap X_n$. Тогда*

$$\mu X = \lim_{n\to\infty} \mu(X_n).$$

2. Пример неизмеримого множества (см. конспект прошлой лекции).

3. Мера Лебега на прямой.

С помощью параллельного переноса определена мера на отрезке $[n, n+1]$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 1 *Множество X измеримо, если измеримо пересечение*

$$X_n = X \cap [n, n+1].$$

Определение 2 $\mu(X_n) = \Sigma \mu X_n$*; если ряд расходится, мера считается бесконечной.*

Теорема 2 *Мера Лебега на прямой σ-аддитивна (допускается мера ∞).*

Доказательство Простое следствие определений и σ-аддитивности меры Лебега на отрезке. □

4. Функция Кантора. Определяется как предел кусочно-линейных функций $f_n : [0,1] \to [0,1]$.

Определение индуктивное:

$$f_0 \equiv x,\ f_1' = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{на } [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1] \\ 0 & \text{на } (\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \end{cases}$$

$f_1(0) = 0$, f непрерывна. Функция f_{n+1} получается из функции f_n следующим образом: горизонтальные участки графика не меняются; наклонные, с сохранением граничных значений, перестраиваются так же, как функция f_0 превращалась в f_1.

Предложение 1 *Построенная выше последовательность f_n равномерно сходится. Предельная функция f_C нестрого монотонна и непрерывна.*

Определение 3 *Функция f_C из предложения 1 называется Канторовой функцией (или Канторовой лестницей).*

4. Самоподобие.

Продолжим функцию f_C на $\mathbb{R}$ до функции $\tilde{f}_C$, полагая

$$f_C(x) = 2^n f_C(3^{-n}x),\ x \in [e^{n-1}, 3^n).$$

Предложение 2 *Функция $\tilde{f}_C$ непрерывна и удовлетворяет условию:*

$$2\tilde{f}_C(\frac{x}{3}) = \tilde{f}_C(x),\ x > 0 \tag{1}$$

Доказательство Оператор $\Phi : f \mapsto g,\ g(x) = 2f(\frac{x}{3})|_{[0,1]}$ сдвигает построенную выше последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n \ldots$ на одну позицию влево. Предел сохраняется. $\square$

Следствие 1

$$\frac{\tilde{f}_C(x) - \tilde{f}_C(y)}{(x-y)^{\log_3 2}} = \frac{\tilde{f}_C(3x) - \tilde{f}_C(3y)}{(3x-3y)^{\log_3 2}}$$

Следствие 2 $\tilde{f}_C$ *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\log_3 2$.