

# Дифференциальные формы на плоскости (продолжение).

## 1 Внешние 2-формы на плоскости

**Определение 1** Внешней 2-формой на плоскости называется билинейная кососимметрическая форма  $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ).

**Пример 1** Пусть  $e_1, e_2$  – базис в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\xi_1, \xi_2$  – два произвольных вектора. Пусть  $\Xi$  матрица перехода от базиса  $e_1, e_2$  к базису  $\xi_1, \xi_2$ . Тогда

$$(1) \quad \omega : \xi_1, \xi_2 \rightarrow \det \Xi$$

является внешней 2-формой. Билинейность и симметричность следуют из свойств определителя.

**Теорема 1** Любая 2-форма  $\omega$  удовлетворяет соотношению:

$$(2) \quad \omega(\xi_1, \xi_2) = (\det \Xi) \omega(e_1, e_2).$$

**Доказательство** С одной стороны, правая часть равенства (2) задает внешнюю форму, принимающую на  $e_1, e_2$  заданное значение. С другой стороны, внешняя 2-форма на плоскости задается своим значением на одной паре векторов, скажем,  $e_1, e_2$ , однозначно. Это следует из определения 1.  $\square$

## 2 Дифференциальные 2-формы

**Определение 2** Дифференциальная 2-форма в области  $U \subset \mathbb{R}^2$  – это соответствие, которое каждой точке  $x \in U$  сопоставляет внешнюю форму  $\omega^2(x; \cdot)$  на  $T_x U$ .

**Пример 2** Рассмотрим базис  $e_1, e_2$  в  $\mathbb{R}^2$ . Обозначим через  $x, y$  координаты в этом базисе, и через  $dx \wedge dy$  – форму  $\omega_0^2$  такую, что

$$\omega_0^2(x; e_1, e_2) \equiv 1.$$

Знак  $\wedge$  обозначает внешнее умножение, которое будет определено ниже. Пока  $dx \wedge dy$  воспринимается как единый символ.

В силу теоремы 1, любая дифференциальная 2-форма на плоскости имеет вид

$$\omega^2(x; \cdot) = a(x) dx \wedge dy.$$

где

$$a(x) = \omega^2(x; e_1, e_2).$$

По теореме 1,

$$\omega^2(x; \xi, \eta) = a(x)(\xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1),$$

где  $(\xi^1, \xi^2)$  и  $(\eta^1, \eta^2)$  – координаты векторов  $\xi, \eta$  соответственно в базисе  $e_1, e_2$ .

### 3 Преобразование форм и векторов при замене координат

Как известно, дифференциал отображения переводит касательное пространство в точке прообраза в касательное пространство к соответствующей точке образа: для  $\xi \in T_x U$ ,

$$h_* \xi = dh_x \xi \in T_{h(x)} \mathbb{R}^2.$$

По форме  $\omega^2$ , определенной в образе отображения  $h$ , можно определить *обратный образ* формы  $\omega$  на прообразе отображения  $h$ :

$$(3) \quad h^* \omega^2(x; \xi, \eta) = \omega^2(h(x); h_* \xi, h_* \eta).$$

### 4 Интегралы от 2-форм на плоскости: эвристическое определение

Рассмотрим ориентированный репером  $e_1, e_2$  единичный квадрат

$$K = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

и дифференциальную форму  $\omega^2$  на нем. Немедленно возникает интеграл

$$I = \int_K \omega^2,$$

определяемый следующим образом. Разобьем квадрат  $K$  на квадраты со стороной  $\frac{1}{n}$ ; пусть  $P_n$  – множество их вершин. Для каждой вершины  $p \in P_n$  рассмотрим два вектора  $\xi(p)$  и  $\eta(p)$  от вершины  $p$  до левой (соответственно, верхней) соседней вершины, см. рис. 1

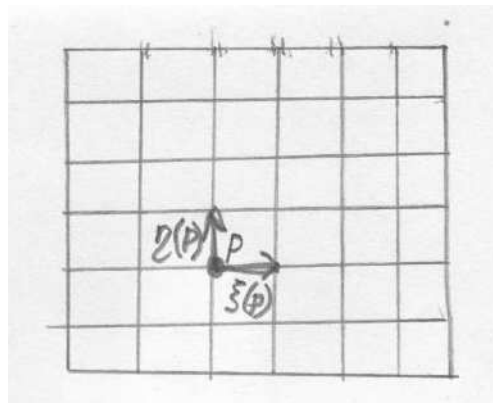


Рис. 1: Интегральная сумма для 2-формы

Возникает интегральная сумма

$$\Sigma_n = \sum_{p \in P_n} \omega^2(p; \xi(p), \eta(p)).$$

Интеграл  $I$  – это, по определению, предел

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n.$$

Пусть теперь  $h : K \rightarrow \mathcal{K} = h(K)$  – диффеоморфизм, продолжаемый в окрестность квадрата  $K$ , и  $\omega^2$  – 2-форма, заданная в окрестности  $\mathcal{K}$ . Положим:

$$\Sigma_n^* = \sum_{p \in P_n} \omega^2(h(p); \xi^*(p), \eta^*(p)),$$

где  $\xi^*(p)$  и  $\eta^*(p)$  – два вектора от вершины  $h(p)$  до образа левой (соответственно, верхней) по отношению к  $p$  вершины решетки  $P_n$ . Интеграл  $\int_{\mathcal{K}} \omega^2$  – это предел интегральных сумм  $\Sigma_n^*$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\int_{\mathcal{K}} \omega^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n^*.$$

Мы не будем доводить это эвристическое определение до формального. Вместо этого мы определим интеграл, пользуясь параметризацией  $\mathcal{K}$ , а затем докажем независимость от параметризации.

**Задача 1** Доказать, что если  $h : U \rightarrow V$ ,  $g : V \rightarrow W$  – диффеоморфизмы, то

$$(4) \quad g^* \circ h^* = (h \circ g)^*.$$

## 5 Интегралы 2-форм: формальное определение

Рассмотрим сначала единичный квадрат  $K$  и форму  $\omega^2$  на нем. Положим:

$$(5) \quad \int_K \omega^2 = \int_K \omega^2(x; e_1, e_2) dx dy.$$

Пусть теперь  $h : K \rightarrow \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$  – диффеоморфизм, и  $\omega^2$  – форма на  $\mathcal{K}$ . Тогда

$$(6) \quad I := \int_{\mathcal{K}} \omega^2 := \int_K g^* \omega^2.$$

Отображение  $h$  играет роль параметризации. Нужно доказать, что интеграл  $I$  от нее не зависит.

Рассмотрим два диффеоморфизма  $h_1$  и  $h_2 : K \rightarrow \mathcal{K}$  и положим:  $g = h_2^{-1} \circ h_1 : K \rightarrow K$ . Доказать совпадение интегралов 6 при  $h = h_1$  и  $h = h_2$  – все равно, что доказать

$$(7) \quad \int_K \alpha^2 = \int_K g^* \alpha^2,$$

где  $\alpha^2 = h_1^* \omega^2$ . Докажем (7). По определению (3),

$$g^* \alpha^2(x, y; \xi, \eta) = \alpha^2(g(x, y); g_* \xi, g_* \eta)$$

Далее, по (5)

$$\begin{aligned} I &= \int_K g^* \alpha^2 = \int_K g^* \alpha^2(x, y; e_1, e_2) dx dy = \int_K \alpha^2(g(x, y); g_* e_1, g_* e_2) dx dy = \\ &= \int_K \alpha^2(g(x, y); e_1, e_2) \det(dg_{x,y}) dx dy. \end{aligned}$$

Положим:  $(u, v) = g(x, y)$ . Тогда по формуле замены переменной

$$\int_K g^* \alpha^2 = \int_K \alpha^2(u, v; e_1, e_2) du dv = \int_K \alpha^2.$$

## 6 Дифференциал 1-формы

Мы переходим ко второму центральному определению – дифференциала 1-формы.

По данной форме  $\omega^1$  мы определим новую форму  $\omega^2 = d\omega^1$ . Достаточно для каждого  $x$  определить  $d\omega^1(x; e_1, e_2)$ .

Отождествим касательное пространство  $T_x$  с его проекцией  $\pi_x T_x$  на плоскость:  $\pi_x(\xi) = x + \xi$ . Отображение  $\pi_x$  инвариантно относительно линейной замены координат, но меняется при нелинейной замене. Положим:

$$K_{x,\varepsilon} = \varepsilon\{t_1 e_1 + t_2 e_2 | t_j \in [0, 1]\} \subset T_x \mathbb{R}^2.$$

Тем же символом мы будем обозначать проекцию  $\pi_x : K_{x,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

### Определение 3 (Арнольд)

$$(8) \quad d\omega^1(x; e_1, e_2) = \lim \varepsilon^{-2} \int_{\partial K_{x,\varepsilon}} \omega^1.$$

Существование предела неочевидно; мы дадим набросок доказательства и одновременно выведем явную формулу для  $d\omega^1$ .

**Теорема 2** Если форма  $\omega^1$  имеет вид

$$(9) \quad \omega^1 = f(x, y)dx + g(x, y)dy,$$

то предел (8) существует, и

$$d\omega^1(x, y; \cdot) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) dx \wedge dy,$$

$$d\omega^1(x, y; e_1, e_2) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y).$$

**Замечание 1** Из определения немедленно следует, что дифференциал точной 1-формы равен нулю. Это следует также из последней формулы.

**Доказательство** Рассмотрим квадрат

$$K = K_{x,y,1} \subset T_{x,y} \mathbb{R}^2.$$

Его ориентированная граница имеет вид

$$\partial K = \Gamma_2 + \Gamma'_1 - \Gamma'_2 - \Gamma_1.$$

Здесь  $\Gamma_j$  – это сторона, проходящая через  $(x, y)$ , перпендикулярная вектору  $e_j$  и ориентированная вектором  $e_i$ ,  $i \neq j$ ,  $\Gamma'_j$  – параллельная ей сторона, см. рис. 2. Отсюда

$$\partial K_{x,\varepsilon} = \varepsilon(\Gamma_2 + \Gamma'_1 - \Gamma'_2 - \Gamma_1).$$

Тогда для  $\omega = \omega^1$ ,

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \omega = \int_{\varepsilon\Gamma_2} \omega + \int_{\varepsilon\Gamma'_1} \omega - \int_{\varepsilon\Gamma'_2} \omega - \int_{\varepsilon\Gamma_1} \omega = \int_{\varepsilon\Gamma_2} \omega(x, 0) - \omega(x, \varepsilon e_2) + \int_{\varepsilon\Gamma'_1} \omega(\varepsilon e_1, y) - \omega(0, y) =$$

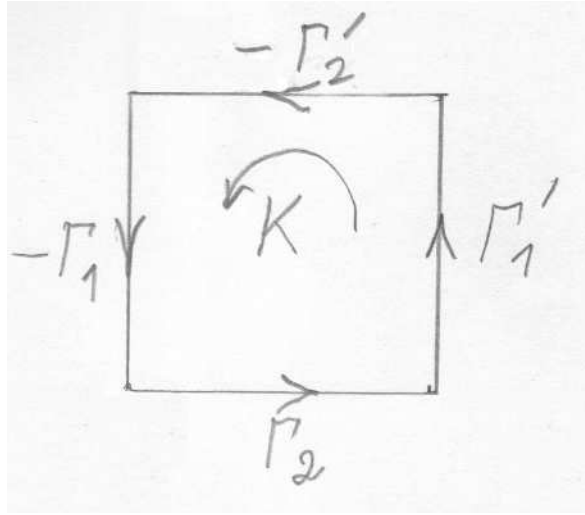


Рис. 2: Ориентированная граница квадрата

$$= \varepsilon \int_0^1 \omega(\varepsilon t, 0; e_1) - \omega(\varepsilon t, \varepsilon e_2; e_1) + \varepsilon \int_0^1 \omega(\varepsilon e_1, \varepsilon t; e_2) - \omega(0, \varepsilon t; e_2).$$

Но при  $t \in [0, 1]$ ,

$$\omega(\varepsilon t, 0; e_1) - \omega(\varepsilon t, \varepsilon e_2; e_1) = -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} + o(\varepsilon),$$

$$\omega(\varepsilon e_1, \varepsilon t; e_2) - \omega(0, \varepsilon t; e_2) = \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} + o(\varepsilon).$$

Поэтому

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \omega \approx \varepsilon^2 \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Следовательно,

$$(10) \quad d\omega(0; e_1, e_2) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)(0).$$

Мы не обосновали подробно оценки остаточных членов; это предлагается сделать в качестве задачи.

Для доказательства корректности определения нужно еще проверить, что дифференциал не меняется при изменении аффинной структуры пространства. Сделаем нелинейную замену:  $x \mapsto x + O(|x|^2)$ . Тогда отображение  $\pi_0$  изменится: образы квадрата  $K_{0,\varepsilon}$  при проекциях, соответствующих старой и новой структуре, отличаются на  $O(\varepsilon^2)$ , см. рис.3.

Интегралы от формы  $\omega^1$  по границам этих двух (криволинейных) параллелограммов отличаются на  $O(\varepsilon^3)$ . Мы не будем здесь этого доказывать.  $\square$

## 7 Формула Грина, она же – формула Стокса для плоскости

**Теорема 3** Для любой кусочно-гладкой кривой  $\gamma$ , ограничивающей область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ :  $\gamma = \partial\Omega$ , и любой 1-формы  $\omega^1$  в  $\Omega$ :

$$(11) \quad \int_{\partial\Omega} \omega^1 = \int_{\Omega} d\omega^1.$$

Другими словами,

$$\int_{\gamma} f dx + g dy = \int_{\Omega} (g_x - f_y) dx dy.$$

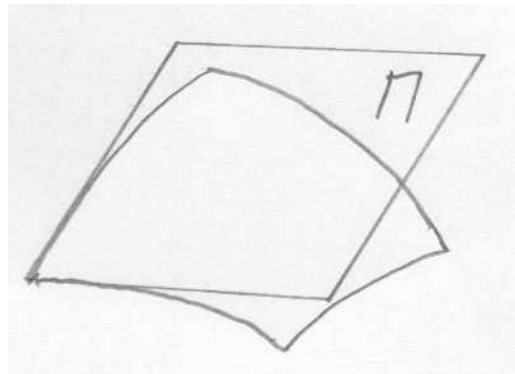


Рис. 3: Две проекции параллелограмма, расположенного в касательном пространстве

**Доказательство** Если область  $\Omega$  составлена из двух частей:  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , то формулу Стокса достаточно доказать для каждой из них; для всей области  $\Omega$  она следует из аддитивности интеграла по области, а также того, что интегралы по общей части границы областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  уничтожаются, см. рис. 4.

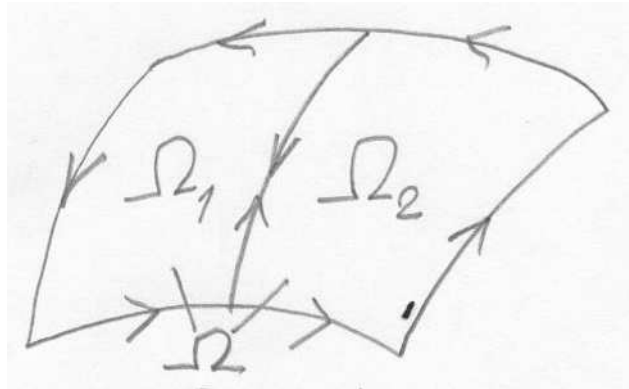


Рис. 4: Формула Стокса для области, составленной из двух частей

Область с кусочно-гладкой границей можно разбить на криволинейные треугольники, а те, в свою очередь, – на гладкие образы квадратов, см. рис. 5.

Поэтому достаточно доказать формулу Стокса для образа квадрата, или, еще проще, для самого квадрата. Отметим, что  $gdy|_{\Gamma_2 \cup \Gamma'_2} = 0$ ,  $fdx|_{\Gamma_1 \cup \Gamma'_1} = 0$ . Поэтому

$$\int_{\partial K} f dx + g dy = \int_{\Gamma'_1} g dy - \int_{\Gamma_1} g dy - \left( \int_{\Gamma'_2} f dx - \int_{\Gamma_2} f dx \right) =: I_1 - I_2.$$

Очевидно,

$$I_1 = \int_0^1 (g(1, y) - g(0, y)) dy$$

$$I_2 = \int_0^1 (f(x, 1) - f(x, 0)) dx$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$g(1, y) - g(0, y) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dx$$

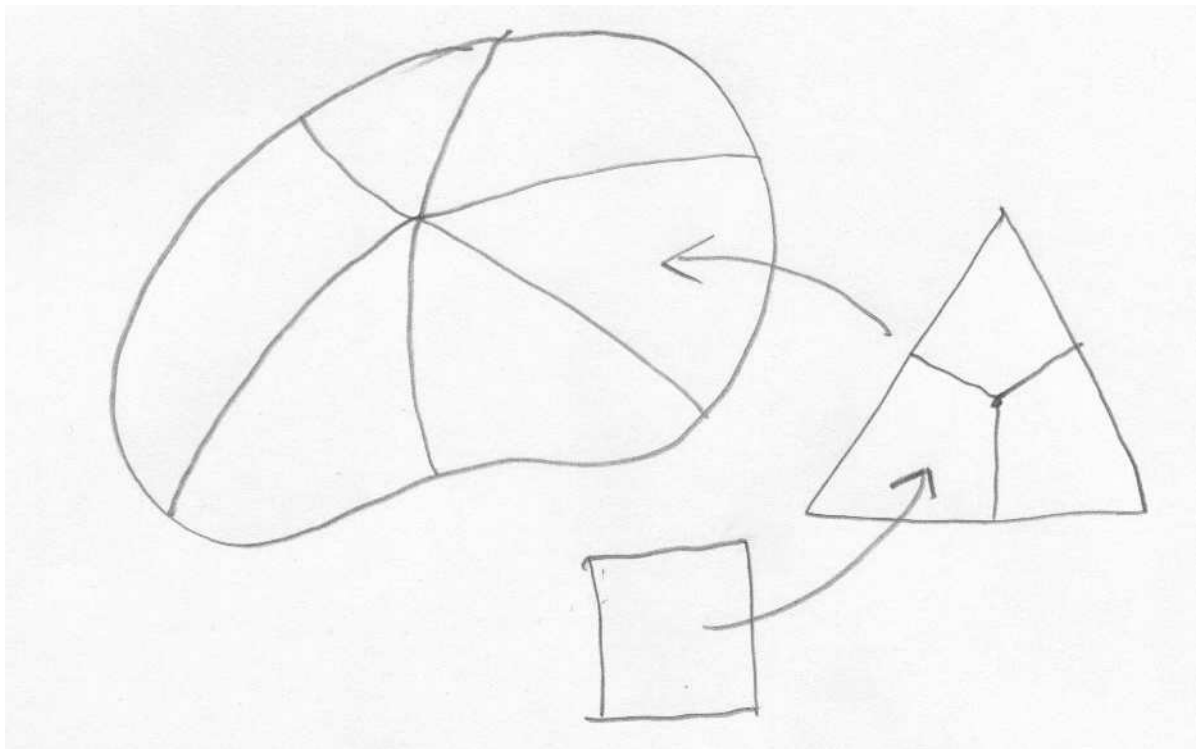


Рис. 5: Разбиение плоской области

$$f(x, 1) - f(x, 0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$$

Заменяя кратный интеграл повторным, получаем:

$$I_1 - I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x} dy - \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} dx = \int_K \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_K d\omega^1.$$

□

**Замечание 2** В переходе от криволинейного квадрата  $K$  к стандартному квадрату  $K$  мы использовали тот факт, что

$$d(g^*\omega) = g^*(d\omega).$$

Это утверждение легко проверяется в координатах; предлагается сделать это в качестве задачи. Кроме того, мы не доказали независимости дифференциала от выбранной системы координат: при нелинейной замене координат проекция  $\pi_x K_{x,\varepsilon}$  меняется. Это также нетрудно сделать на плоскости. Обе трудности будут преодолены при изложении общей теории.