Лекция 11. Мера Лебега

Лекции 4го модуля в значительной мере следуют учебнику А.Н.Колмогорова и С.В.Фомина “Элементы теории функций и функционального анализа”, изд. 7.

1. Элементарные множества.

Определение 1 *Назовем* интервалами *множества вида*

$$[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b) \tag{1}$$

(то есть те, которые обычно называются отрезками, полуинтервалами и интервалами).

Определение 2 *Элементарным множеством называется конечное объединение интервалов. Совокупность всех элементарных множеств обозначается $\mathcal{E}$.*

Определение 3 *Длиной интервала* (1) *называется $|a-b|$. Длиной (или мерой) элементарного множества A называется сумма длин составляющих его попарно непересекающихся интервалов.*

Теорема 1 *[полуаддитивность длины] Пусть $A, A_n \in \mathcal{E},\ A \subset \cup A_n$. Тогда*

$$m(A) \leq \Sigma\ m(A_n).$$

(По умолчанию, суммирование от 1 до ∞)

2. Внешняя мера.

Определение 4 *Совокупность счетных объединений элементарных множеств обозначается $\mathcal{E}_\sigma$. Длина m продолжается на $\mathcal{E}_\sigma$ по формуле:*

$$m(\sqcup A_n) = \Sigma\ m(A_n).$$

Определение 5 (внешняя мера) *Пусть $E = [0, 1]$. Ниже в этой лекции все множества принадлежат E. Для произвольного X его внешняя мера $\mu^*(X)$ – это инфимум длин множеств из $\mathcal{E}_\sigma$, покрывающих X:*

$$\mu^*(X) = \inf_{A \supset X, A \in \mathcal{E}} m(A).$$

Теорема 2 *[полуаддитивность внешней меры] Пусть $X_n \subset E,\ X = \cup X_n$. Тогда*

$$\mu^*(X) \leq \Sigma \mu^*(X_n).$$

3. Алгебра измеримых множеств.

Определение 6 *Множество X измеримо по Лебегу, если оно может быть приближено элементарным множеством с точностью до "погрешности" сколь угодно малой внешней меры:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{E} : \mu^*(X \triangle A) < \varepsilon$$

Класс всех измеримых множеств обозначается $\mathcal{L}$.

Определение 7 *Для $X \in \mathcal{L}$, $\mu(X) = \mu^*(X)$.*

Теорема 3 *Измеримые множества образуют алгебру: вместе с любыми двумя множествами класс $\mathcal{L}$ содержит их объединения, пересечения и дополнения.*

Доказательство Теорему достаточно доказать только для объединений и дополнений. Для дополнений она следует из соотношения:

$$(X \triangle A) = ((CX) \triangle (CA));$$

докажите это соотношение.

Для объединения она следует из соотношения:

$$((X \cup Y) \triangle (A \cup B)) \subset (X \triangle A) \cup (Y \triangle B)$$

докажите это соотношение. □

4. Конечная аддитивность меры Лебега.

Теорема 4 *Мера конечного дизъюнктного объединения измеримых множеств равна сумме их мер:*

$$\mu(\sqcup_1^N X_n) = \sum_1^N \mu(X_n)$$