Лекция 10. Свойства преобразования Фурье и их применение.

1. Свертка.

Подобие свертки возникло при изучении δ-образных последовательностей. А именно, мы доказали, что если Δ_n – δ-образная последовательность, а f – финитная непрерывная функция, то

$$\int f(x)\Delta_n(x-y)dx \rightrightarrows f(y). \qquad (1)$$

Замечане 1 *В этой теореме финитность можно заменить на ограниченность.*

Операция, переводящая пару функций $f,\ \Delta_n$ в левую часть соотношения (1) несимметрична. Ее симметричный аналог определяется так:

Определение 1 *Свертка двух функций на прямой (обозначается $f*g$) – это функция*

$$f*g : y \mapsto \int f(x)g(y-x)dx.$$

Следующее определение равносильно.

Определение 2 *Рассмотрим дифференциальную 1-форму на плоскости:*

$$\omega_x = f(x)g(y)dx$$

Положим:

$$f*g(z) = \int_{l_z} \omega_x. \qquad (2)$$

Здесь l_z – прямая $x+y=z$, ориентация которой индуцируется из ориентации оси x проектированием $(x,y)\mapsto x$.

Предполагается, что все участвующие в определении интегралы сходятся.

Теорема 1 *Свертка симметрична:*

$$f*g = g*f$$

Доказательство По определению,

$$g*f = \int_{l_z} g(x)f(y)dx := \int_{l_z} \omega'_x$$

Симметрия $s : (x, y) \mapsto (y, x)$ переводит форму ω'_x в форму $\omega_y = f(x)g(y)dy$. Заметим, что на $l_z : \omega_x + \omega_y = 0$. Симметрия s переводит l_z в $-l_z$. Поэтому

$$\int_{l_z} \omega'_x = \int_{-l_z} s^* \omega'_x = \int_{-l_z} \omega_y = -\int_{-l_z} \omega_x = \int_{l_z} \omega_x.$$

$\square$

2. Свертка и преобразование Фурье.

Теорема 2 *Преобразование Фурье переводит свертку в произведение и произведение в свертку (последнее – с коэффициентом* $\frac{1}{2\pi}$*).*

Доказательство Докажем, что

$$\mathcal{F}(f * g) = \tilde{f}\tilde{g} \tag{3}$$

По формуле (2),

$$\mathcal{F}(f * g)(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{l_z} f(x)g(y)dx \right) e^{-i\alpha z} dz = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha(x+y)} f(x)g(y)dxdy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha x} f(x) e^{-i\alpha y} g(y) dxdy = \tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha).$$

Равенство

$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{2\pi} \tilde{f} * \tilde{g} \tag{4}$$

выводится из (3) и формулы для квадрата преобразования Фурье: $\mathcal{F}^2 = 2\pi S$, где S – оператор обращения аргумента:

$$Sf : x \mapsto f(-x).$$

Применим преобразование Фурье а обеим частям равенства (3). Тогда

$$\mathcal{F}^2(f * g) = 2\pi S(f * g) = \mathcal{F}(\tilde{f}\tilde{g}).$$

Возьмем теперь $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ за исходные функции и обозначим их φ и ψ. Тогда $f = \frac{1}{2\pi} S\mathcal{F}\varphi,\ g = \frac{1}{2\pi} S\mathcal{F}\psi$, и мы получаем формулу:

$$\frac{1}{2\pi} S(S\mathcal{F}\psi * S\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(\varphi\psi). \tag{5}$$

Осталось доказать, что левая часть равна $\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\psi * \mathcal{F}\varphi$. Действительно, пусть u и v – произвольные функции из $\mathcal{S}$; тогда

$$S(Su * Sv) = u * v. \tag{6}$$

Равенства (5) и (6) влекут (4). Равенство (5) доказано. Докажем (6):

$$S(Su * Sv)(z) = (Su * Sv)(-z) = \int_{l_{-z}} u(-x)v(-y)dx = -\int_{-l_z} u(x)v(y)dx = u * v(z).$$

$\square$

3. Задача Коши для уравнения теплопроводности.

$$u_t = u_{x^2},\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ u(0,x) = f(x),$$

функция f абсолютно интегрируема. Ищем $v(t,\alpha) = \mathcal{F}_x u(t,\alpha)$

$$v_t = -\alpha^2 v,\ v(0,\alpha) = \tilde{f}(\alpha)$$

$$v(t,\alpha) = \tilde{f}(\alpha)e^{-t\alpha^2}.$$

Успех! Преобразование Фурье от искомого решения получено. Остается заведомо выполнимый шаг – обратить преобразование Фурье .

Важное замечание. При этом обращении мы ищем преобразования Фурье от функций вида $f(\lambda\alpha)$. Эти преобразования имеют вид $\frac{1}{\lambda}\tilde{f}(\frac{1}{\lambda}x)$. Такие семейства функций нам уже встречались. При условиях: $f(0) = \frac{1}{2\pi}, \tilde{f} \geq 0$, они представляют собой δ-образное семейство. Действительно, если $g \geq 0$ и $\int g = 1$, то последовательность $\Delta_n(x) = ng(nx)$ – δ-образная. Это - (простая) задача из занятия 3. Но, в силу формулы обращения для преобразования Фурье, $\int \tilde{f} = 2\pi f(0)$. Правая часть равна 1 при $f(0) = \frac{1}{2\pi}$.

Вернемся к решению уравнения теплопроводности. Обращая преобразрвание Фурье, получаем:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} S \circ \mathcal{F}_\alpha(\tilde{f}(\alpha)e^{-t\alpha^2}) = \frac{1}{(2\pi)^2} S(\mathcal{F}_\alpha \tilde{f} \cdot \mathcal{F}_\alpha(e^{-t\alpha^2})) =$$

$$\frac{1}{2\pi} f * S\mathcal{F}_\alpha(e^{-t\alpha^2}) = \frac{1}{2\pi} f * \mathcal{F}_\alpha(e^{-t\alpha^2}),$$

поскольку функция $\mathcal{F}_\alpha(e^{-t\alpha^2})$ – четная. Далее, как объяснено в замечании выше,

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_\alpha(e^{-t\alpha^2}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

При $t \to 0$ это – δ-образное семейство. Поэтому $f * \mathcal{F}_\alpha(e^{-t\alpha^2}) \to f$ при $t \to 0$.

Задача Коши для уравнения теплопроводности решена.