“Царский путь” в пространство L_2.

1 Организация курса

1. Домашние задания (20%)
2. 4 15-минутные теоретические контрольные (20%)
3. Основная часть листков (20%)
4. Экзамен + дополнительная часть листков (40%)

Каждая часть: 10 баллов; одна задача со $*$ – один балл в 4-ую часть; 10 задач со $*$ – можно не писать экзамен.

2 Традиционное определение пространства L_2

(на $\Omega = [a, b]$ или на $\Omega = \mathbb{R}$)

Определение 1 *L_2 – это пространство измеримых функций на Ω, суммируемых (интегрируемых) с квадратом: $\int_\Omega f^2(x)dx < \infty$.*

Ступени к этому определению:

- мера Лебега
- измеримые функции
- интеграл Лебега

Точнее, элемент пространства L_2 – это класс эквивалентности функций: две функции эквивалентны, если они совпадают почти всюду.

3 “Царский путь” по Арнольду: короткое определение L_2

Определение 2 *Вещественное пространство $L_2(\Omega)$ – это пополнение пространства $C^0(\Omega)$ (вещественные непрерывные функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактным носителем) по норме:*

$$||f||^2 = \int_\Omega f^2(x)dx \tag{1}$$

Замечане 1 *Функция f непрерывна, поэтому (1) – интеграл Римана.*

Определение 3 *Комплексное пространство L_2 – то же, но функции комплекснозначные, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, и $||f||^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 dx$.*

Теорема 1 (о пополнении) *Любое метрическое пространство X с метрикой ρ может быть пополнено: существует пространство $\tilde{X} \supset X$ с метрикой $\tilde{\rho}$ такое, что*
$\tilde{X}$ полно;
X плотно в $\tilde{X}$;
$\tilde{\rho}|_{X\times X} = \rho$

Точки $\tilde{X}$ – классы эквивалентности последовательностей Коши в X. Две последовательности (f_n) и (g_n) эквивалентны, если $\rho(f_n, g_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

4 Евклидовы и гильбертовы пространства

Евклидово скалярное произведение:
$E \times E \to \mathbb{R},\ \{\xi, \eta\} \mapsto (\xi, \eta)$:
(1^0) Билинейность
(2^0) Симметричность
(3^0) Положительность: $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$
Конечномерный случай – евклидов; бесконечномерный – гильбертов.

Теорема 2 (упражнение) *Все n-мерные евклидовы пространства изометричны.*

Следствие 1 *В L_2 действует привычная геометрическая интуиция: любое двумерное (трехмерное) пространство в L_2 изометрично $\mathbb{R}^2$ (соответственно, $\mathbb{R}^3$).*

5 Неравенство Коши-Буняковского

В $L_2(\Omega, \mathbb{R})$

$$|\int_\Omega fg dx| \leqslant \sqrt{\int f^2 dx \int g^2 dx} \tag{2}$$

Почему верно (2)? Потому что

$$|\cos\varphi| < 1 \quad \forall\varphi \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Объяснение 1 *Плоскость в $L_2(\Omega, \mathbb{R})$, натянутая на f, g со скалярным произведением* (2)*, изометрична плоскости $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением*

$$(u, v) = |u||v| \cos\angle(u, v).$$

значит, из (3) *следует $|(u, v)| \leqslant |u||v|$, откуда следует* (2).

6 Общий вид линейного функционала в конечномерном пространстве E ($\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$)

Пусть линейный функционал $l : E \to R$ линеен над $\mathbb{R}$, E – евклидово.

Теорема 3 $\exists\eta : l(\xi) = (\xi, \eta)\forall\xi$.

Доказательство Рассмотрим гиперплоскость $\mathcal{L} = \{l = 0\}$. Возьмем

$$n \perp \mathcal{L},\ (n, n) = 1;\ \eta = l(n) \cdot n.$$

Произвольный вектор x разлагается в сумму $\xi + \alpha n,\ \xi \in \mathcal{L}$. Тогда $l(\xi + \alpha n) = \alpha l(n)$. Но

$$(x, \eta) = (\xi + \alpha n, l(n)n) = \alpha l(n).$$

Следовательно, $l(\xi) = (\xi, \eta)$. $\square$

7 Линейные функционалы в L_2 : ограниченность и непрерывность.

Определение 4 *Линейный функционал на подмножестве $C \subset L_2$ – это линейное отображение $l : C \to \mathbb{R}$.*

Определение 5 *Линейный функционал $l : C \to \mathbb{R}$ ограничен, если он ограничен на пересечении C с единичной сферой $S = \{f \in L_2 | ||f|| = 1\}$.*

Теорема 4 *Если линейный функционал $l : C^0 \to \mathbb{R}$ ограничен, то он продолжается до непрерывного отображения $\tilde{l} : L_2 \to \mathbb{R}$.*

Доказательство Пусть $|l(f)| \leqslant M \ \forall f \in S \cap C^0$. Тогда $\forall f \in C^0, \ |l(f)| \leqslant M||f||$. Пусть $(f_n) \sim \varphi \in L_2$ – последовательность Коши в C^0 с нормой (1). Тогда $l(f_n)$ – последовательность Коши в $\mathbb{R}$, поскольку

$$|l(f_n) - l(f_m)| \leqslant M||f_n - f_m||.$$

Следовательно, существует $\lim l(f_n) = l(\varphi)$. □

8 Общий вид линейного функционала в $L_2 = L_2(\Omega, \mathbb{R})$

Теорема 5 *Линейный ограниченный функционал в L_2 имеет вид $l(f) = (f, g)$.*

Дальнейшая часть лекции — доказательство этой теоремы.

Лемма 1 *Подпространство $\mathcal{L} = \{\varphi \in L_2 | \lambda(\varphi) = 0\}$ замкнутою*

Доказательство Пусть $\varphi_n \in \mathcal{L}, \ \varphi_n \to \varphi$ в L_2. Тогда $|l(\varphi - \varphi_n)| \leqslant M||\varphi - \varphi_n|| \to 0$. Но $l(\varphi_n) = 0 \Rightarrow l(\varphi) = 0$. □

Лемма 2 *Каждое замкнутое подпространство $\mathcal{L}$ гильбертова пространства H имеет ортогональное дополнение $\mathcal{L}^\perp$.*

Доказательство Нам нужно доказать, что для любого $\xi \in H$ существует единственное разложение

$$\xi = \eta + \zeta, \ \eta \in \mathcal{L}, \ \zeta \in \mathcal{L}^\perp$$

В качестве ζ возьмём вектор минимальной нормы с началом в ξ и концом на $\mathcal{L}$, равносильно, найдём $\eta \in \mathcal{L}$, для которого $||\xi - \eta||$ минимальна. Докажем существование, единственность такого вектора, и перпендикулярность ζ к $\mathcal{L}$.
Единственность. Пусть существуют два кратчайших вектора с началом в точке ξ и концом на $\mathcal{L}$. Проведем плоскость через конец ξ , содержащую эти два вектора. Получим два перпендикуляра из точки на прямую, существование которых запрещено планиметрией.
Существование. Пусть $s = \inf_{\eta \in \mathcal{L}} ||\xi - \eta||$. Рассмотрим последовательность $(\eta_n) : ||\xi - \eta_n|| \to s$. Докажем, что (η_n) – последовательность Коши. Положим: $\zeta_n = \xi - \eta_n$. Пусть ζ_n и ζ_m ε-близки к s. Проведем трехмерное пространство через векторы ξ, η_m, η_n и опустим перпендикуляр ζ' на плоскость η_m, η_n из точки ξ. Имеем: $s \leqslant ||\zeta'|| \leqslant ||\zeta_j||, \ j = m, n$. Следовательно, $0 < ||\zeta_j|| - ||\zeta'|| < \varepsilon$. Поэтому $||\zeta_j - \zeta'|| < \sqrt{C\varepsilon}$, где C не зависит от m, n. Но $||\eta_j - \eta'|| = ||\zeta_j - \zeta'||$. Следовательно,$||\eta_j - \eta'|| < \sqrt{C\varepsilon}$. Наконец, по неравенству треугольника,

$$||\eta_m - \eta_n|| < 2\sqrt{C\varepsilon}.$$

Тем самым, $\eta_n \to \eta,\ \xi - \eta = \zeta,\ ||\zeta|| = \min_{\eta\in\mathcal{L}} ||\xi - \eta||$, и η и есть требуемый вектор.
Перпендикулярность ζ к L. Возьмем $\zeta_\varepsilon = \zeta + \varepsilon\eta$. Имеем: $\eta \in \mathcal{L}$, $(\zeta,\zeta) > (\zeta_\varepsilon,\zeta_\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$. Следовательно, функция

$$(\zeta_\varepsilon,\zeta_\varepsilon) = (\zeta,\zeta) + \varepsilon(\zeta,\eta) + \varepsilon^2(\eta,\eta)$$

удовлетворяет условию $n'_\varepsilon(0) = (\zeta,\eta) = 0$, поскольку 0 – минимум n_ε.

Лемма 2 доказана. □

Возвращаясь к доказательству теоремы, возьмем единичный вектор $n \perp \mathcal{L} = \{l = 0\}$. Положим $\lambda = l(n),\ \eta = \lambda n$. Тогда $l(\xi) = (\xi,\eta)$, см. евклидов случай. Теорема 5 доказана.