Дифференциальная геометрия
Задачи письменного экзамена
23 декабря 2013 г.

1. Докажите равенство $R_{ijkl} = R_{klij}$ для тензора кривизны Римана (предполагая остальные симметрии доказанными).

2. Докажите, что метрика $e^{2x}(y^2dx^2 + dy^2)$ (в области $y > 0$ плоскости координат x, y) плоская. Найдите ковариантно постоянные 1-формы и евклидовы координаты.

3. Выпишите условия симметричности и согласованности с метрикой для связности на римановом многообразии в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ векторных полей. Выразите коэффициенты Γ^i_{jk}, связности Леви-Чивиты в этом базисе, $\nabla_{e_k} e_j = \Gamma^i_{jk} e_i$, через коэффициенты c^k_{ij} попарных коммутаторов $[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k$.

4. (Псевдо)риманова метрика и связность в касательном расслоении пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами $x = u_1$, $y = u_2$, $z = u_3$ задаются в базисе координатных векторных полей соотношениями

$$(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_1 \partial u_i \partial u_j}, \qquad \Gamma_{ijk} = (\nabla_{\partial_{u_k}} \partial_{u_j}, \partial_{u_i}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k},$$

   где

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 z + x\, y^2) + \frac{1}{4}\, y^2 z^2 + a\, z^5.$$

   При каких значениях параметра a связность плоская? При каких значениях она симметричная? При каких согласована с метрикой?

5. Докажите, что площадь $S = S(\varepsilon)$ диска радиуса ε и длина $\ell = \ell(\varepsilon)$ его границы на римановой поверхности имеют вид

$$S = \pi\, \varepsilon^2 + A\, \varepsilon^4 + o(\varepsilon^4), \qquad \ell = 2\, \pi\, \varepsilon + B\, \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3).$$

   Выразите константы A и B через гауссову кривизну в центре диска.