Дифференциальная геометрия
Листок 7
11 ноября 2013 г.

Пусть ∇ – связность в $T\mathbb{R}^n$, задаваемая покоординатным дифференцированием векторных полей, рассматриваемых как вектор-функции.

1. Для $n = 2$, найдите производную $\nabla_u v$, где $u = u^1\partial_\rho + u^2\partial_\varphi$ и $v = v^1\partial_\rho + v^2\partial_\varphi$, в полярных координатах на плоскости. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля в этих координатах.

   Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность. Определим связность в TM следующим образом: ковариантная производная векторного поля задается композицией его покоординатной производной как трехкомпонентной вектор-функции с последующей ортогональной проекцией на касательную плоскость.

2. Для случая, когда M — единичная сфера, найдите производную $\nabla_u v$ для $u = u^1\partial_\varphi + u^2\partial_\psi$, $v = v^1\partial_\varphi + v^2\partial_\psi$, в сферических координатах. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля в этих координатах.

   Пусть M — риманова поверхность. *Риманова связность* в TM задается формулами $\nabla_\xi e_1 = \alpha(\xi)\, e_2$, $\nabla_\xi e_2 = -\alpha(\xi)\, e_1$, где e_1 и e_2 — ортонормированный базис касательных векторных полей и α — 1-форма, построенная при доказательстве блистательной теоремы Гаусса.

3. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля римановой связности в координатах (x, y) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega(x, y)$ — некоторая функция.

   Связность ∇ в расслоении E определяет естественную связность ∇^* в двойственном расслоении E^* условием

$$\partial_\xi(u, s) = (\nabla^*_\xi u, s) + (u, \nabla_\xi s),$$

   где u и s — сечения расслоений E^* и E соответственно. Аналогично, связности ∇^E и ∇^F в расслоениях E и F определяют связность в расслоении $E \otimes F$ условием

$$\nabla_\xi e \otimes f = (\nabla^E_\xi e) \otimes f + e \otimes (\nabla^F_\xi f).$$

4. Как связаны между собой матрицы связности в некотором расслоении и ассоциированной связности в двойственном расслоении в двойственных базисах?

5. Выразите через символы Кристоффеля ковариантную производную $\nabla_k\, g_{i,j}$ римановой метрики, рассматриваемой как сечение расслоения $(T^*M)^{\otimes 2}$.

Дифференциальная геометрия
Листок 8
18 ноября 2013 г.

Кривизна связности — линейное преобразование R, действующее в слоях расслоения и зависящее билинейным и кососимметричным образом от пары касательных векторов на базе. Вот различные его эквивалентные интерпретации:
1) *Действие на сечениях*:

$$R(\xi,\eta)=\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta\nabla_\xi-\nabla_{[\xi,\eta]}$$

2) *Представление в тривиализации* как матрица 2-форм (*структурное уравнение Картана*):

$$R=dA+A\wedge A.$$

3) *Координатное представление*

$$R(\partial_{x^k},\partial_{x^\ell})^i_j=R^i_{jk\ell}=\frac{\partial\Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^\ell}+\Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{j\ell}-\Gamma^i_{m\ell}\Gamma^m_{jk}.$$

4) Как *инфинитезимальная голономия*: параллельный перенос слоев расслоения по периметру параллелограмма со сторонами $\varepsilon\xi,\varepsilon\eta$ равен

$$\mathrm{Id}-\varepsilon^2R(\xi,\eta)+o(\varepsilon^2).$$

1. Докажите, что действующий на сечения оператор определения 1) коммутирует с умножением на функции, и, тем самым, действительно определяет линейное преобразование слоев расслоения.
2. Вычислите кривизну связностей задач 1,2,3 предыдущего листка.

Теорема. *Если R — матрица кривизны римановой связности на поверхности* (см. задачу 3 предыдущего листка), *то матрица gR кососимметрическая. Кривизна метрики выражается через* $(1,2)$-*компоненту* $R_{1212}\,dx^1\wedge dx^2$ *матрицы gR по формуле*

$$K=\frac{R_{1212}}{\det g}.$$

3. Проверьте равенство теоремы для метрик задач 1,2,3 предыдущего листка.

Пусть M — поверхность в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим связность в тривиальном расслоении $M\times\mathbb{R}^3\to M$ задаваемую покоординатным дифференцированием сечений, рассматриваемых как трехкомпонентные вектор-функции. Кривизна этой связности равна, очевидно, нулю.

4. Пользуясь деривационными формулами, запишите матрицу этой связности в базисе, состоящем из ортонормированных касательных полей e_1,e_2 и единичного нормального вектора $e_3=n$ поверхности. Вычислите матрицу кривизны этой связности и приравняйте ее нулю. Выпишите получившиеся уравнения (они называются *уравнениями Майнарди-Петерсона-Кодацци*; они выражают необходимые и достаточные условия того, что данная пара квадратичных форм на поверхности реализуется локально как первая и вторая форма некоторого вложения в $\mathbb{R}^3$).

Дифференциальная геометрия
Листок 9
25 ноября 2013 г.

Теорема. *Связность плоская тогда и только когда, когда ее кривизна тождественно равна нулю.*

1. Пусть связность в расслоении ранга 1 на плоскости задана (1×1) матрицей 1-форм а) $A = (y\,dx - x\,dy)$ и б) $A = (y\,dx + x\,dy)$. Найдите ковариантно постоянное продолжение сечения $s(0,0) = 1$ в начале координат в точку $(1,1)$ вдоль следующих кривых: прямолинейного отрезка; ломаной $(0,0)$—$(1,0)$—$(1,1)$; ломаной $(0,0)$—$(0,1)$—$(1,1)$.

2. Докажите, что связность в расслоении ранга 3 над двумерной базой с координатами (x,y) и следующей матрицей 1-форм плоская. Найдите базис ковариантно постоянных сечений.

$$A = \begin{pmatrix} -dy & dx - x\,dy & xy\,dx - x\,dy \\ 0 & 0 & -y\,dx + dy \\ 0 & 0 & dx \end{pmatrix}$$

3. Пусть A — матрица связности задачи 1 листка 7 (в полярных координатах на плоскости). Напишите условие ковариантной постоянности сечений. Постройте базис ковариантно постоянных сечений и докажите, тем самым, что эта связность плоская.

4. Сечения тривиального расслоения со слоем $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ над проколотой плоскостью $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ могут рассматриваться как комплекснозначные фукнции. Введем связность в этом расслоении формулой

$$\nabla_\xi u = \partial_\xi u + a\frac{\xi_1 + i\xi_2}{x_1 + ix_2}u,$$

где $\xi = \xi_1\partial_{x_1} + \xi_2\partial_{x_2}$ и $a \in \mathbb{C}$ — константа. Плоская ли эта связность? Найдите параллельное преобразование, задаваемое этой связностью вдоль окружности радиуса 2 с центром в точке $(0,1)$.

Дифференциальная геометрия
Листок 10
2 декабря 2013 г.

Теорема. *В касательном расслоении к риманову многообразию имеется естественная связность (называемая* связностью Леви-Чивиты*), однозначно определяемая двумя требованиями: 1) согласованность с римановой структурой и 2) симметричность.*
Символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты (в базисе координатных векторных полей) задаются равенствами

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} \Big(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} \Big).$$

Эквивалентным образом, матрица A связности Леви-Чивиты находится из соотношения

$$gA = \frac{1}{2}(dg + s), \qquad s_{ij} = -\partial_i g_j + \partial_j g_i,$$

(слагаемые в скобках описывают симметричную и кососимметричную компоненты матрицы), где $g_i = g(\partial_{x_i}, \cdot)$ — 1-форма, двойственная i-му координатному векторному полю; ее компоненты образованы i-м столбцом (или строкой) матрицы g, а ∂_i — покомпонентная производная соответствующих 1-форм.

1. Докажите эквивалентность следующих условий согласованности с метрикой:
— индуцированная связность в двойственном расслоении E^* совпадает с исходной при отождествлении E и E^*, задаваемом метрикой;
— для произвольных двух сечений u, v и векторного поля ξ выполняется равенство
$$\partial_\xi(u, v) = (\nabla_\xi u, v) + (u, \nabla_\xi v);$$
— матрица связности кососимметрична *в ортогональном базисе*;
— параллельный перенос является ортогональным преобразованием (т.е. сохраняет скалярное произведение).

2. Докажите, что условие симметричности метрики $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$ равносильно симметрии символов Кристоффеля $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ в *базисе координатных векторных полей.*

3. Докажите, что из ковариантной постоянности 1-формы симметричной связности вытекает ее замкнутость.

4. Действуя в базисе координатных векторных полей, вычислите связность Леви-Чивиты (т.е. символы Кристоффеля или матрицу 1-форм), а также кривизну (при помощи формулы теоремы из листка 8) для следующих метрик:
а) евклидовой метрики на плоскости в поляных координатах;
б) метрики на единичной сфере в сферических координатах;
в) метрики на псевдосфере в псевдосферических координатах;
г) метрики на параболоиде вращения в евклидовом пространстве;
д) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega(x, y)$ — произвольная гладкая функция.