Дифференциальная геометрия
Листок 5[1]
7 октября 2013 г.

Теорема. *Риманова метрика на поверхности евклидова тогда и только тогда, когда её кривизна K тождественно обращается в ноль.*

Для нахождения евклидовых координат евклидовой метрики полезно использовать следующую лемму (которая доказывает также первое утверждение теоремы предыдущего листочка).

Лемма. *Пусть ортонормированный репер 1-форм $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ получен из репера u_1, u_2 поворотом на угол ψ, зависящий от точки поверхности:*

$$\tilde{u}_1 = \cos\psi\; u_1 + \sin\psi\; u_2, \qquad \tilde{u}_2 = -\sin\psi\; u_1 + \cos\psi\; u_2.$$

Тогда форма связности $\tilde{\alpha}$ для этого репера выражается через форму связности α исходного репера при помощи соотношения

$$\tilde{\alpha} = \alpha + d\psi.$$

В частности, если $K \equiv 0$, то есть $d\alpha = 0$, то форма α является (локально) дифференциалом функции. Выбрав функцию ψ из соотношения $d\psi = -\alpha$, мы получаем $\tilde{\alpha} = 0$, то есть $d\tilde{u}_1 = d\tilde{u}_2 = 0$. Следовательно, $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ являются дифференциалами функций. Эти функции и служат искомыми евклидовыми координатами.

1. Докажите, что следующие метрики евклидовы. Найдите евклидовы координаты.
   а) $dx^2 + x^2\, dy^2$;
   б) $\dfrac{dx^2 + dy^2}{(x^2+y^2)^2}$;
   в) первая квадратичная форма на конусе $z^2 = x^2 + y^2$ в его гладких точках;
   г) $dx^2 + 2\cos(x+y)\, dx\, dy + dy^2$.
2. *Разверткой* пространственной кривой называется объединение ее касательных. Параметризуйте развертку. Определите первую и вторую квадратичные формы, а также главные кривизны развертки кривой с (непостоянной) кривизной k. Докажите, что гауссова кривизна развертки равна нулю. Найдите евклидовы координаты на развертке спиральной кривой $(a\cos t,\; a\sin t,\; b\,t)$.

[1] `http://vyshka.math.ru/1314/DiffGeom.php`

Пусть $v(t) \in T_{\gamma(t)}S$ — поле касательных векторов, заданное вдоль кривой γ на поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$. Поле v называется *параллельным* (ковариантно постоянным), если производная $\frac{dv}{dt}$ (покомпонентная) ортогональна касательной плоскости поверхности в каждой точке кривой, $\frac{dv}{dt} \perp T_{\gamma(t)}S$. Это условие задает *параллельный перенос касательных векторов вдоль кривых* на римановой поверхности. Вот основные свойства операции параллельного переноса:

— Для евклидовой плоскости эта операция совпадает с обычным параллельным переносом.

— Параллельный перенос не зависит от параметризации кривой, но зависит, вообще говоря, от выбора кривой, соединяющих две данные точки.

— Параллельный перенос сохраняет длины векторов, углы между ними и, более общим образом, скалярное произведение.

— *Операция параллельного переноса относится к внутренней геометрии и однозначно определяется метрикой на поверхности.*

— Если две поверхности касаются друг друга вдоль кривой, то параллельный перенос вдоль этой кривой для обеих поверхностей совпадает.

— В частности, *разверткой* поверхности вдоль данной кривой называется поверхность с плоской (т.е. евклидовой) метрикой, касающаяся искодную поверхность вдоль данной кривой. Параллельный перенос на поверхности совпадает с параллельным переносом на ее развертке.

— *Отображение Гаусса* сопоставляет точки поверхности ее единичный вектор нормали. Параллельный перенос вдоль кривой на поверхности совпадает с параллельным переносом на сфере вдоль образа этой кривой при отображении Гаусса.

Если в некотором ортогональном базисе e_1, e_2 касательных полей данное поле имеет вид $v = v_1(t)\, e_1 + v_2(t)\, e_2$, то параллельный перенос задается дифференциальным уравнением

$$\frac{dv_1}{dt} = \alpha(\gamma')\, v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\alpha(\gamma')\, v_1,$$

где α — 1-форма, при помощи которой определялась кривизна метрики и $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$ — вектор скорости движения по кривой. Если же записать поле v в виде $v = \rho(t)\big(\cos(\varphi(t))\, e_1 + \sin(\varphi(t))\, e_2\big)$, то уравнение параллельного переноса приобретает вид

$$\rho = \mathrm{const}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\alpha(\gamma').$$

В частности, при обходе вдоль замкнутой петли, ограничивающей односвязную область D, касательный вектор поворачивается на угол

$$\Delta\varphi = \oint \frac{d\varphi}{dt} dt = -\int_{\partial D} \alpha = \int_D K\sigma.$$

3. Вычислите параллельный перенос на сфере вдоль ее меридиана тремя разными способами: а) геометрически при помощи развертки, представляющей собой квадратичный конус, касающийся сферы вдоль меридиана, б) выписывая и решая дифференциальное уравнение параллельного переноса, и в) вычисляя площадь сферической области, ограниченной меридианом.

Дифференциальная геометрия
Листок 6
14 октября 2013 г.

Отображение Гаусса $M \to S^2$ сопоставляет точке на поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ единичный нормальный вектор в этой точке. Касательная плоскость T_xM к поверхности параллельна касательной плоскости сферы $T_{G(x)}S^2$ в точке образа отображения Гаусса. Следовательно, эти две плоскости можно отождествить и считать, что производная G_* отображения Гаусса действует из касательной плоскости в себя.

1. Докажите следующие свойства отображения Гаусса:
а) Собственные векторы производной G_* совпадают с главными направлениями поверхности, а собственные значения равны $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ соответственно, где λ_1 и λ_2 — главные кривизны. Соответственно, гауссова кривизна совпадает с определителем производной гауссова отображения.
б) Параллельный перенос векторов на поверхности вдоль кривой совпадает с параллельным переносом векторов на сфере вдоль образа кривой при гауссовом отображении.
б) Форма кривизны на поверхности равна $K\sigma = G^*\Sigma$, обратному образу формы площади Σ на сфере. В частности, имеет место равенство $\int_M K\, s = 4\,\pi\, d$, где $4\pi = \int_{S^2} \Sigma$ — площадь сферы, а d — степень гауссова отображения.

2. Выберите какое-нибудь вложение поверхности рода g в пространство и вычислите степень Гауссова отображения для этого вложения.

Теорема Гаусса-Бонне для замкнутой поверхности M утверждает равенство

$$\int_M K\sigma = 2\,\pi\,\chi(M),$$

где $\chi(M) = 2 - 2g$ – эйлерова характеристика. Обобщение этой формулы для (компактной) поверхности с (кусочно-гладким) краем имеет следующий вид

$$\int_M K\sigma = 2\,\pi\,\chi(M) - \sum \theta_i - \int_{\partial M} k_g d\ell,$$

где θ_i — внешние углы изломов края, то есть углы, на которые скачком меняется направление касательного вектора при проходе излома, $d\ell$ — элемент длины на кривой ∂M, k_g — геодезическая кривизна.
Кривая на поверхности называется *геодезической*, если ее геодезическая кривизна равна нулю.

3. Докажите, что сумма углов треугольника, стороны которого составлены из геодезических, равна π плюс суммарная его гауссова кривизна.

Плоскостью Лобачевского называется верхняя пола $z > 0$ двуполостного гиперболоида $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, снабженная метрикой, полученной ограничением на эту поверхность формы $dx^2 + dy^2 - dz^2$.

4. Докажите, что это действительно метрика (т.е. положительно определенная форма). Найдите ее выражение в *псевдосферических* координатах

$$x = \operatorname{sh}\varphi\ \cos\psi, \quad y = \operatorname{sh}\varphi\ \sin\psi, \quad z = \operatorname{ch}\varphi.$$

5. Модель Клейна плоскости Лобачевского — ее центральная проекция из начала координат на плоскость $z = 1$. Найдите выражение для метрики плоскости Лобачевского в модели Клейна.

6. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского — ее центральная проекция из точки $(0, 0, -1)$ на плоскость $z = 0$. Найдите выражение для метрики плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре.

7. Рассмотрим единичный диск модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и отобразим его на верхнюю полуплоскость при помощи голоморфной функции $x + i\,y \mapsto f(x + i\,y)$, где $f(w) = -i\frac{w+i}{w-i}$. Найдите метрику получившейся модели плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости.

8. Определите кривизну плоскости Лобачевского (в какой-либо, а следовательно, любой из приведенных ее моделей).

9. Докажите, что геодезическими на плоскости Лобачевского в ее исходной модели служат кривые, образованные пересечением гиперболоида с плоскостями, проходящими через начало координат. Опишите геодезические во всех остальных моделях.