Листок 4. Подмногообразия (повторение)

Динамические системы, **28.09.2012**

Определение **1.** Подмножество S векторного пространства M называется (гладким) k-мерным подмногообразием в точке $x \in S$, если для некоторых окрестностей этой точки $U \ni x$ и нуля $V \ni 0$ существует *выпрямляющий* диффеоморфизм $f : U \to V$, переводящий $S \cap U$ в (k-мерное векторное подпространство в M)$\cap V$. Замкнутое S называется подмногообразием, если является таковым в каждой своей точке.

4◇1$^{\text{o}}$ **а)** Касательный конус к подмногообразию – векторное подпространство.
б) Являются ли подмногообразиями плоскости окружность, квадрат, $y^2 = x^3$, $y^2 = x^4$? Обязательно ли является подмногообразием замкнутое подмножество плоскости, у которого все касательные конусы – прямые?

4◇2 **а**$^{\text{v}2}$) Образ подмногообразия при диффеоморфизме – подмногообразие.
б$^{\text{v}2}$) Напомните определение графика дифференцируемого отображения $f : M \to N$ и докажите, что он является подмногообразием $M \times N$.

4◇3 **а**^{2}) Докажите, что образ окрестности регулярной точки x инъективного отображения $f : M \to N$, $\dim N > \dim M$, является подмногообразием в точке $f(x)$.
Докажите, что любое подмногообразие является образом некоторого диффеоморфизма $M \times \mathbb{R}^k \to M$. – Это я с них помогаю $\forall x$ доказывать существование такого диффеоморфизма $M \times \mathbb{R}^k \to M$, что образом окрестности x будет окрестность точки $f(x)$.
б^2) Докажите, что прообраз регулярного значения отображения $f : M \to N$, $\dim N < \dim M$, является подмногообразием в M.
Обратно, любое подмногообразие в точке $y \in M$ совпадает в ее окрестности с:
в^1) образом некоторого инъективного отображения $f : M' \to M$, $\dim M' < \dim M$, для которого значение $y = f(x)$ регулярно.
г^1) прообразом регулярного значения некоторого $g : M \to N$, $\dim M > \dim N$.
При этом касательное пространство к подмногообразию в точке y равно
д^1) образу дифференциала $df_x : T_xM' \to T_yM$, **е**^{1}) ядру дифференциала dg_y.

4◇4^2 Если 0 – регулярное значение отображения f, то касательное пространство к множеству, задаваемому уравнением $f = 0$, задается уравнением $df = 0$. Покажите на примере, что, если 0 – критическое значение f, то утверждение не верно.

4◇5 **а**^{2}) Если траектория $\varphi : \mathbb{R}^1 \to M$ инъективна без остановок ($\forall t\ \dot\varphi(t) \neq 0$) и предельных точек ($\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t)| = \infty$), то ее образ – подмногообразие.
б^2) Если одно из трех не выполнено, то образ может не быть многообразием.

4◇6 Развертка $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – представление f в виде композиции вложения (т. е. инъективного отображения без критических точек) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и проекции $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ вдоль оси Oz. **а**^{2}) Придумайте развертку отображений из задач **0◇5а** и **б**.
б^1) Докажите, что дискриминант f – проекция тех точек x образа $S = g(\mathbb{R}^2)$, в которых касательная плоскость T_xS верткальна (параллельна оси Oz).

4◇7 Для каждого из следующих множеств $S \subset M$ с выделенной точкой $e \in S$ докажите, что S – многообразие в точке e; предложите диффеоморфизм $M \to M$, сохраняющий S и переводящий e в любую другую точку S; сделайте вывод, что S – многообразие. **а**$^{\text{v}1}$) $e \in S \subset M$ – это $(1, 0, \dots, 0) \in \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$.
б^2) $E =$(единичная матрица)$\in SL(n) = \{A \mid \det A = 1\} \subset$(матрицы $n\times n$)$= \mathbb{R}^{n\times n}$.

в^2) $E \in SO(n) = \{A \mid \det A = 1,\ AA^t = E\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.

г^{x2}) Является ли подмногообразием $\{\det A = 0\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$?

4◇8 (Зонтик Уитни) **а**^{2}) Найдите критические точки и дискриминант отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(s,t) = (s, st, t^2)$, нарисуйте его образ. Найдите критические точки и дискриминант функции, нарисуйте образ.

б^2) Найдите критические точки и дискриминант функции $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$, $g(x,y,z) = x^2z = y^2$, нарисуйте прообразы критических и некритических значений. $g \circ \gamma = 0$.

в^{x3}) Докажите, что образ любого полиномиального отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ содержится в множестве нулей некоторого ненулевого полинома.

Образ гладкого отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ содержится в множестве нулей некоторого ненулевого полинома p степени не выше n, где n – наименьшее k, при котором $\mathbb{R}^3_k$ содержит образ многочленов степени k от двух переменных.

4◇9 (Стратификация Уитни) Стратификацией Уитни множества $S \subset M$ называется его разбиение на непересекающиеся куски $S_1, \ldots, S_p$, каждый из которых является подмногообразием в каждой своей точке и удовлетворяет "правилу Лопиталя": если последовательность $x_i \in S_\alpha$ сходится к точке $x \in S_\beta$, то $T_xS_\beta \subset \lim_{i\to\infty} T_{x_i}S_\alpha$.

а^{x2}) Дайте определение этого предела и проверьте, что разбиение зонтика Уитни $x^2z = y^2$ на ось Oz и дополнение к ней не является стратификацией Уитни.

б^{x3}) Найдите стратификацию Уитни зонтика Уитни (она существует для любого множества, заданного алгебраическими равенствами и неравенствами).

4◇10 (Классический дискриминант) **а**^{1}) Напишите уравнение дискриминанта функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + x$. $(\lambda(x_1) - y)(\lambda(x_2) - y)(\lambda(x_3) - y)$, где $\lambda(x) = 4x^3 - 4x$.

б^{x2}) Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – множество всех точек $(a_n, \ldots, a_0)$, таких что многочлен $a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет кратный вещественный корень. Докажите, что D – дискриминант отображения $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $f(a_n, \ldots, a_1, t) = (a_n, \ldots, a_1, -\sum_{i=1}^{n} a_it^i)$.

в^{x3}) Классический дискриминант – это функция на $\mathbb{R}^{n+1}$, которая в каждой точке $(a_n, \ldots, a_0)$ равна $\prod_{i<j}(t_i - t_j)^2$, где $t_1, \ldots, t_n$ – корни (вообще говоря, комплексные) многочлена $a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$. Докажите, что классический дискриминант – многочлен от $(a_n, \ldots, a_0)$, вычислите этот многочлен при $n = 2$ и 3 и докажите, что он обращается в ноль на D и, при $n \leqslant 3$, нигде больше. А при $n \geqslant 4$?

4◇11^{x3} (Лемма Сарда) Критические значения непрерывно дифференцируемой функции $[0,1] \to \mathbb{R}^1$ можно покрыть счетным набором интервалов сколь угодно малой суммарной длины. ($\Rightarrow$ некритические плотны)

Определение **2.** Говорят, что векторное поле $\mathbf{v}$ в векторном пространстве N касается множества $S \subset N$, если $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}S$ в любой точке $\mathbf{x} \in S$.

4◇12 **а**^{v1}) Если поле $\mathbf{v}$ касается прообраза $f^{-1}(y)$ диффернцируемой функции $f : N \to \mathbb{R}$, то $L_{\mathbf{v}}f = 0$ во всех точках прообраза. **б**^{1}) Обратное неверно.

в^2) Но если значение y регулярно, то верно. **г**^{x1}) И если критические точки f нигде не плотны в $f^{-1}(y)$, то верно. Придумайте гладкое ненулевое векторное поле, касающееся **д**^{v1}) сферы в $\mathbb{R}^3$, **е**^{v1}) объединения координатных осей в $\mathbb{R}^2$.

ж^3) Связное компактное подмногообразие $\mathbb{R}^2$ – образ периодической траектории.

з^3) Если векторное поле на плоскости касается связного подмногообразия и не обращается в ноль в его точках, то подмногообразие – фазовая кривая поля.