Листок 4. Интегралы и вычеты

Комплексный анализ 2012/13, **срок сдачи 12.3.13**

Упражнение (для семинара). Вычислите интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}; \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}; \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4}\, dx.$$

4◇1 Вычислите **а)** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\, dx$, где $a, b \in \mathbb{R}$; **б)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; **в)** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$.

г*) Докажите равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}}$.

4◇2 **а)** Пусть $\Gamma_R = \{z \mid |z| = R, Re(z) \le 0\}$. Докажите, что $\int_{\Gamma_R} \frac{e^z}{z}\, dz \to 0$ при $R \to +\infty$.

б) Вычислите $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Подсказка: замените интеграл по отрезку $[-R, R]$ интегралом по объединеню дуги $i\Gamma_R$, дуги $-i\Gamma_\varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ мало), и отрезков $[-R, -\varepsilon]$ и $[\varepsilon, R]$.

4◇3 **а)** Пусть $\Omega_R = \{Re^{i\phi} \mid -\pi/4 \le \phi \le 0\}$. Докажите, что $\int_{\Omega_R} e^{-z^2}\, dz \to 0$ при $R \to +\infty$.

б) Вычислите *интегралы Френеля* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$.

Подсказка: сделайте в интеграле $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\, dx$ замену переменной $z = xe^{-i\pi/4}$ и воспользуйтесь вычислением из вещественного анализа $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

4◇4* Пусть $f(z)$ — функция, обратная к $g(w) = we^{-w}$ (иными словами, f — решение уравнения $f(z) = ze^{f(z)}$).

а) Докажите, что $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n$.

б) Выведите из уравнения для функции f, что ее коэффициенты Тейлора c_n удовлетворяют уравнению $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum\limits_{s_1+\dots+s_k=n-1} c_{s_1} \dots c_{s_k}$.

в) Докажите, что $n!c_n$ есть число деревьев (связных графов без циклов) с n вершинами, занумерованными числами $1, 2, \dots, n$, и с одной отмеченной вершиной (корнем дерева).

Подсказка: $c_n = \operatorname{Res}\limits_{z=0} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$. Сделайте в интеграле, задающем вычет, замену переменной $z = we^{-w}$.