В. А. Васильев

Дополнительные главы топологии

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 8. Спектральная последовательность расслоения

1. Функториальность спектральной последовательности фильтрованного пространства. Пусть X и Y — два фильтрованных пространства с фильтрациями $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_N = X$ и $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_N = Y$. Пусть имеется отображение $f : X \to Y$, уважающее эти фильтрации, то есть $f(X_i) \subset Y_i$ для всякого i. Тогда автоматически возникает гомоморфизм соответствующих спектральных последовательностей, то есть для любого $r \geq 0$ система гомоморфизмов $E^r_{p,q}(X) \to E^r_{p,q}(Y)$, коммутирующих с дифференциалами ∂_r. Очень полезно при этом следующее обстоятельство: если для некоторого r этот гомоморфизм $f_r : E^r(X) \to E^r(Y)$ оказывается изоморфизмом, то автоматически являются изоморфизмами и все последующие гомоморфизмы $f_s, s > r$. В частности, отсюда следует[1] изоморфизм градуированной группы

$$\bigoplus_{p=0}^{N} H_i^{(p)}(X)/H_i^{(p-1)}(X) \tag{1}$$

и аналогичной группы для Y, а это влечет и изоморфность самих групп $H_*(X)$ и $H_*(Y)$.

2. Спектральная последовательность, связанная с произвольным фильтрованным комплексом. Пусть дан абстрактный комплекс

$$\dots \to C_{i+1} \to C_i \to C_{i-1} \to \dots,$$

снабженный конечной фильтрацией (то есть каждая из абелевых групп C_i профильтрована подгруппами $C_i^{(0)} \subset \dots \subset C_i^{(N)} \equiv C_i$, причем $\partial(C_i^{(p)}) \subset C_{i-1}^{(p)}$ для любых i, p. Тогда точно как и выше определяется спектральная последовательность, порожденная этой фильтрацией и сходящаяся к группам (1) для каждого i.

3. Спектральная последовательность расслоения над клеточным пространством. Если пространство X расслоено над B, то в группе сингулярных цепей X имеется полезная фильтрация: по размерностям проекций соответствующих сингулярных симплексов в B. Спектральная последовательность, порожденная этой фильтрацией, дает очень много информации, связывающей гомологии X, B и F. Однако это определение связано с очевидными сложностями, вытекающими из неоднозначности понятия размерности. Поэтому приходится прибегать к более формальным и менее инвариантным определениям этой же самой спектральной последовательности, использующим вспомогательную структуру на B; однако полезно понимать указанную выше мотивировку этого построения.

Итак, пусть имеется расслоение $p : X \to B$ с типичным слоем F, причем его база B — связный CW-комплекс. Профильтруем B остовами: $B_i = sk^i B$, и профильтруем X прообразами этих остовов: $X_i = p^{-1}(B_i)$. Спектральная последовательность расслоения (X, B, p, F) — это спектральная последовательность, вычисляющая гомологии X и порожденная последней фильтрацией. Члены E^0 и E^1 этой спектральной последовательности зависят от выбора CW-структуры на B, а член E^2 и все последующие уже оказываются определенными инвариантно.

[1] в более общем случае, когда наши фильтрации — бесконечные, здесь требуется осторожность

3.1. От члена E^0 к члену E^1. По определению, член $E^0_{p,q}$ спектральной последовательности — это группа $C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1})$. В нашем случае эта группа распадается в прямую сумму a_p одинаковых слагаемых, где a_p — число p-мерных клеток в B, и для каждой такой клетки соответствующее слагаемое изоморфно $C_{p+q}(F\times\bar{D}^p)/C_{p+q}(F\times\partial\bar{D}^p)$, где $\bar{D}^p$ — p-мерный шар. Соответственно, дифференциал этого члена

$$\partial_0 : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$$

— это обычный дифференциал комплекса относительных цепей, вычисляющий относительные гомологии $H_{p+q}(F\times\bar{D}^p, F\times\partial\bar{D}^p) \simeq H_q(F)$ для каждой p-мерной клетки. В результате получаем, что группа $E^1_{p,q}$ гомологий этого комплекса имеет вид $(H_q(F))^{a_p}$, что идеологически правильно записывается еще в таком виде:

$$\mathcal{C}_p(B, H_q(F)); \tag{2}$$

здесь $\mathcal{C}_p$ — обозначение для клеточных цепей, а вся запись означает, что для каждой p-мерной клетки в B надо взять некоторый элемент группы $H_q(F)$. Если дан такой элемент группы (2), то соответствующий элемент группы

$$E^1_{p,q} \equiv H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$$

реализуется следующим образом. Для любой p-мерной клетки U в B мы <u>каким-то образом</u> выбираем гомеоморфизм

$$p^{-1}(U) \sim U\times F, \tag{3}$$

согласованный с проекцией на U. Затем берем относительный $(p+q)$-мерный цикл в $(\bar{D}^p\times F, \partial\bar{D}^p\times F)$, равную прямому произведению шара $\bar{D}^p$ на цикл в F, сопоставляемый цепью (2) нашей клетке U. Посредством характеристического гомеоморфизма (продолженного на границу клетки при помощи накрывающей гомотопии) и гомеоморфизма (3) этот относительный цикл превращается в относительный цикл в X_p по модулю X_{p-1}. Здесь важно, однако, словосочетание “каким-то образом”: вообще говоря, гомеоморфизмы вида (3) над разными клетками нельзя согласовать разумным образом, поэтому наша формула (2) содержит значительный произвол. Эта неприятность преодолима в случае, если все “коэффициентные” группы $H_q(F)$, соответствующие слоям над разными точками (или, что то же самое, над разными клетками) базы можно отождествить друг с другом. Последнее условие — это условие *гомологической простоты* нашего расслоения: оно заключается в том, что фундаментальная группа базы должна тривиально действовать на группе гомологий слоя. Конечно, это условие выполнено, если база односвязна.

3.2. От члена E^1 к члену E^2. Итак, группы $E^1_{p,q}$ и $E^1_{p-1,q}$ спектральной последовательности расслоения, между которыми действует дифференциал этого члена E^1, таковы:

$$\mathcal{C}_p(B, H_q(F) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_{p-1}(B, H_q(F)). \tag{4}$$

Допустим сначала, что наше расслоение гомологически просто, то есть коэффициентная группа $H_q(F)$ — одна и та же для всех клеток, участвующих в обоих этих выражениях. Тогда гомоморфизм (4) — это обычный граничный гомоморфизм для клеточных комплексов (с не вполне обычной группой коэффициентов), вытекающий из точной последовательности тройки (B_p, B_{p-1}, B_{p-2}). Соответственно, группы $E^2_{p,q}$ гомологий комплексов

$$\dots \to E^1_{p+1,q} \to E^1_{p,q} \to E^{p-1,q} \to \dots,$$

составленных строками таблички E^1 с действием этого дифференциала, — это просто группы клеточных гомологий базы с такими коэффициентами:

$$E^2_{p,q}(X) \simeq H_p(B, H_q(F)). \tag{5}$$

Если же условие гомологической простоты не выполнено, то результат будет тот же самый, но группы $H_q(F)$ нельзя будет отождествить между собой для всех клеток, поэтому нам приходится в формуле поставить их в фигурные скобки:

$$E^2_{p,q}(X) \simeq H_p(B, \{H_q(F)\}), \tag{6}$$

что означает гомологии с коэффициентами в локальной системе, послойно изоморфной $H_q(F)$ и определенной действием группы $\pi_1(B)$ на гомологиях слоя.

4. Примеры.

4.1. Пространство унитарной группы. $SU(3)$ является пространством расслоения над S^5 со слоем S^3. Действительно, это пространство можно рассматривать как множество всех унитарно ортонормированных реперов в $\mathbf{C}^3$. Сопоставляя такому реперу его первый вектор, мы получаем проекцию $SU(3) \to S^5$. Слой этого расслоения равен $SU(2) \sim S^3$. Член E^2 спектральной последовательности этого расслоения имеет вид

(7)

3	**Z**	0	0	0	0	**Z**
2	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	**Z**	0	0	0	0	**Z**
	0	1	2	3	4	5

(имеется в виду, что все остальные группы $E^2_{p,q}$ – нулевые). Очевидно, ни один из старших дифференциалов $\partial_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$, $r \geq 2$, этой последовательности не может быть нетривиальным: для любых (p,q) либо исток, либо образ такого гомоморфизма – нулевая группа. Следовательно, эта последовательность *стабилизируется* в члене E^2, то есть $E^2 \equiv E^\infty$. Итак, $H_i(SU(3)) \sim \mathbf{Z}$ при $i = 0, 3, 5, 8$ и тривиальна при остальных i. В частности, $H_*(SU(3)) \sim H_*(S^5 \times S^3)$. Интересно, что эта гомологическая эквивалентность не порождается топологической: между этими двумя пространствами нет гомеоморфизма.

Аналогично, легко посчитать, что $H_*(SU(4)) \sim H_*(S^7 \times S^5 \times S^3)$.

4.2. Пространство петель сферы S^n. Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0. Мы уже рассматривали пространство путей LX, точки которого — это непрерывные отображения $[0,1] \to X$, переводящие 0 в x_0. Это пространство стягиваемо и обладает отображением $s : LX \to X$, переводящим всякое отображение $f : [0,1] \to X$ в точку $f(X)$. Пространством петель ΩX пространства X называется прообраз произвольной точки $y \in X$ (как правило, той же самой точки x_0); все такие прообразы гомотопически эквивалентны между собой. Зная, что LX стягиваемо (в частности его гомологии тривиальны во всех положительных размерностях), можно попробовать вычислить гомологии ΩX через гомологии X. Рассмотрим например случай $X = S^n$, $n \geq 2$ (а на картинке ниже будет $n = 4$).

(8)

3	**Z**	0	0	0	**Z**
2	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	**Z**	0	0	0	**Z**
	0	1	2	3	4

Мы знаем строчку $\{q = 0\}$ члена E^2 спектральной последовательности расслоения $LX \to X$: это просто гомологии базы S^n этого расслоения. Более того, этот член может иметь только два ненулевых и изоморфных друг другу столбца: $E^2_{0,q} \sim E^2_{n,q}$.

Если бы пространство ΩX имело нетривиальные гомологии в одной из размерностей $1 \ldots, n-2$, то эти гомологии безболезненно проникли бы и в пространство LX: действительно, в клетки

$E_{0,q}$, $q = 1, \ldots, n-2$, не действует ни один из дифференциалов ∂_r из ненулевых клеток. Напротив, если бы отображение $\partial_n : E^n_{n,0} \to E^n_{0,n-1}$ не было изоморфизмом $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, то пространство LX имело бы нетривиальные гомологии в размерности $n-1$ или n. Итак, $E^2_{0,n-1} \sim \mathbf{Z}$. Но тогда и все группы $E^2_{n,q}$ равны 0 при $q = 1, \ldots, n-2$ и $\mathbf{Z}$ при $q = n-1$. Рассуждая дальше точно так же, получаем по индукции, что $H_i(LS^n) = 0$ при i не кратных $n-1$ и изоморфно $\mathbf{Z}$ при i кратных $n-1$.

5. Еще два замечания.

5.1. Спектральная последовательность расслоения и гомологии слоя. Тождественное вложение $F \to X$ слоя над отмеченной точкой отображает гомологии этого слоя в гомологии пространства X. Если задать на F тривиальную фильтрацию $F_0 = F$, то это вложение уважает фильтрации, в частности задает гомоморфизм спектральных последовательностей. Если расслоение гомологически просто, то столбец $E^2_{0,q}$ совпадает[2] с группой гомологий F, и наш гомоморфизм $E^2(F) \to E^2(X)$ является изоморфизмом на этот столбец. Последующие гомоморфизмы ∂_r, $r \geq 3$, последовательности $E^r_{p,q}(X)$ могут нетривиально действовать в этот столбец. Подгруппа в $E^2_{0,q}$, порожденная образами всех этих дифференциалов, — это в точности ядро отображения $H_q(F) \to H_q(X)$, заданного тождественным вложением. Соответственно, образ этого отображения — это факторгруппа группы $H_q(F)$ по этому ядру.

5.2. Спектральная последовательность расслоения и гомологии базы. Проекция $p : X \to B$ также согласована с фильтрациями (где база профильтрована своими остовами) и задает гомоморфизм спектральных последовательностей $E^r(X) \to E^r(B)$. При $r = 2$ этот гомоморфизм является изоморфизмом строки $E^2_{p,0}(X)$ на $E^2_{p,0}(B) \equiv H_p(B)$. Последующие дифференциалы ∂_r, $r \geq 3$, могут нетривиально действовать из этой клетки $E_{p,0}(X)$ в другие клетки. Общее ядро всех этих отображений — это в точности образ группы $H_p(X)$ в $H_p(B)$ при проекции $X \to B$.

[2] напомним, что B предполагается линейно связным